The Journal of Applied Science **Vol. 14 (No. 1): 58-67 [2015]**
วารสารวิทยาศาสตร์ประยุกต์
ISSN 1513-7805 Printed in Thailand

Review Article

จำนวนฟีโบนักชีของกราฟ

Fibonacci numbers of graphs

ธนวัฒน์ วิเชียรไพศาล

Tanawat Wichianpaisarn

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพฯ 10800

Department of Mathematics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok 10800

E-mail: tanawat.w@sci.kmutnb.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้จะนำเสนอบทนิยามและตัวอย่างของจำนวนฟีโบนักชีของกราฟต่างๆ ซึ่งจะมีความเชื่อมโยงไปถึงจำนวนฟีโบนักชีและจำนวนลูคัส นอกจากนั้นจะพิจารณาค่าขอบเขตของจำนวนฟีโบนักชีของกราฟใดๆ และค่าขอบเขตของจำนวนฟีโบนักชีของกราฟต้นไม้ด้วย

คำสำคัญ : จำนวนฟีโบนักชี จำนวนลูคัส กราฟ

Abstract

In this article, we introduce the definition and examples of the Fibonacci numbers of graphs, which are related to the Fibonacci and Lucus numbers. Furthermore, we gives the bounds of the Fibonacci numbers of graphs and the Fibonacci numbers of trees.

Keywords : Fibonacci number, Lucus number, graph

Vol. 14 (No. 1): 58-67 [2015]

1. บทนำ

ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci sequence) เป็นลำดับที่มีความสำคัญมากลำดับหนึ่งในคณิตศาสตร์ โดยตั้งชื่อเพื่อเป็นเกียรติแก่ เลโอนาร์โด ฟีโบนักชี (Leonardo Fibonacci) แห่งเมืองปีซา ประเทศอิตาลี (เกิดประมาณปี พ.ศ. 1713) ซึ่งท่านได้แนวคิดมาจากการตั้งปัญหาของการขยายพันธุ์ของกระต่าย

ลำดับฟีโบนักชีนั้นมีความสัมพันธ์กับหลายสิ่งในธรรมชาติ เช่น รังผึ้ง การแตกกิ่งของต้นไม้ กลีบดอกไม้ การเรียงตัวของใบไม้แบบบันไดเวียน เป็นต้น

รูปที่ 1. เลโอนาร์โด ฟีโบนักชี
(วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี, 2558)

ในบทความนี้จะนำเสนอบทนิยามและตัวอย่างของจำนวนฟีโบนักชีของกราฟ รวมถึงทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะเป็นการเชื่อมโยงกันระหว่างเรื่องของทฤษฎีกราฟกับจำนวนในลำดับฟีโบนักชี

2. จำนวนฟีโบนักชีของกราฟ

จำนวนฟีโบนักชีลำดับที่ n **(** n^{th} **Fibonacci number)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ F_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) ดังนี้

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ โดยที่ } F_0 = 0 \text{ และ } F_1 = 1$$

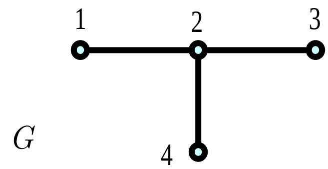
ซึ่งถ้านำมาเขียนเป็นลำดับ (sequence) จะได้ลำดับของจำนวนฟีโบนักชีเป็น $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...$

สำหรับกราฟในบทความนี้จะพิจารณาเฉพาะกราฟที่เป็นกราฟอย่างง่าย (simple graph) นั่นคือ เป็นกราฟที่ไม่มีวงวน (loop) และไม่มีเส้นเชื่อมหลายชั้น (multiple edges)

กำหนดให้ G เป็นกราฟ เขียนแทนเซตของจุดยอด (vertex set) ทั้งหมดใน G ด้วย $V(G)$ และเขียนแทนเซตของเส้นเชื่อม (edge set) ทั้งหมดใน G ด้วย $E(G)$

ให้ $S(G) = \{ A \subseteq V(G) \mid$ สองจุดใดๆ ใน A ไม่มีเส้นเชื่อมหากันในกราฟ $G \}$

ตัวอย่างที่ 1



รูปที่ 2. กราฟ G

จากกราฟ G ในรูปที่ 2 จะได้ว่า

$$S(G) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}\}$$ ❑

จำนวนฟีโบนักชีของกราฟ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f(G)$ โดยนิยามให้ $f(G) = |S(G)|$ นั่นคือให้ $f(G)$ เป็นจำนวนสมาชิกในเซต $S(G)$

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณากราฟวิถี (path) P_1 และ P_2 ดังรูปที่ 3

รูปที่ 3. กราฟวิถี P_1 และ P_2

จะได้ว่า $S(P_1) = \{\phi, \{1\}\}$ และ $S(P_2) = \{\phi, \{1\}, \{2\}\}$

ดังนั้น $f(P_1) = |S(P_1)| = 2$ และ $f(P_2) = |S(P_2)| = 3$ ❑

จากตัวอย่างที่ 2 สามารถขยายผลลัพธ์ไปสู่จำนวนฟีโบนักชีของกราฟวิถี P_n สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ได้ ซึ่งจะสัมพันธ์กับจำนวนฟีโบนักชีดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 $f(P_n) = F_{n+2}$ เมื่อ P_n คือกราฟวิถีที่มีจำนวนจุดยอด n จุด

บทพิสูจน์

รูปที่ 4. กราฟวิถี P_n

กำหนดให้ $A \in S(P_n)$ พิจารณาจุดยอด n ในกราฟ P_n โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 : $n \notin A$ แล้วจะได้ว่า $|\{A \in S(P_n) \mid n \notin A\}| = |S(P_{n-1})| = f(P_{n-1})$

กรณีที่ 2 : $n \in A$ แล้วจะได้ว่า $n-1 \notin A$ เนื่องจากจุดยอด $n-1$ และ n มีเส้นเชื่อมหากัน

ฉะนั้น $|\{A \in S(P_n) \mid n \in A\}| = |S(P_{n-2})| = f(P_{n-2})$

ดังนั้น $f(P_n) = f(P_{n-1}) + f(P_{n-2})$ โดยที่ $f(P_1) = 2 = F_3$ และ $f(P_2) = 3 = F_4$

จากบทนิยามของจำนวนฟีโบนักชี ทำให้สรุปได้ว่า $f(P_n) = F_{n+2}$ ❑

ต่อไปจะทำการพิจารณาจำนวนฟีโบนักชีของกราฟวง (cycle) ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับจำนวนลูคัส (Lucus number) ที่มีบทนิยามคล้ายกับจำนวนฟีโบนักชีแต่แตกต่างกันที่ค่าเริ่มต้นดังนี้

จำนวนลูคัสลำดับที่ n **(**n^{th} **Lucus number)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ L_n นิยามโดย

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{โดยที่} \quad L_0 = 2 \quad \text{และ} \quad L_1 = 1$$

ซึ่งสามารถเขียนกระจายออกมาเป็นลำดับได้เป็น $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$

ก่อนที่จะกล่าวถึงจำนวนฟีโบนักชีของกราฟวง จะขอกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนักชีและจำนวนลูคัสก่อนเพื่อนำไปใช้ในการพิจารณาหาค่าของจำนวนฟีโบนักชีของกราฟวงดังบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้งที่ 2 $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

บทพิสูจน์ จะทำการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (induction) บนค่าของ n

กำหนดให้ $P(n)$ แทนประพจน์ $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

<u>ขั้นฐาน</u> : $P(1)$ เป็นจริง เนื่องจาก $L_1 = 1 = F_0 + F_2$

<u>ขั้นอุปนัย</u> : สมมติให้ $P(i)$ เป็นจริงสำหรับทุก $1 \le i \le k$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} \\ &= F_{k-1} + F_{k+1} + F_{k-2} + F_k \\ &= (F_{k-1} + F_{k-2}) + (F_{k+1} + F_k) \\ &= F_k + F_{k+2} \end{aligned}$$

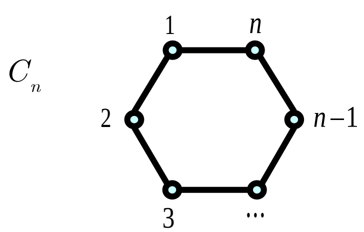
ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n ❑

ทฤษฎีบทที่ 3 $f(C_n) = L_{n+1}$ เมื่อ C_n คือกราฟวงที่มีจำนวนจุดยอด n จุด

บทพิสูจน์



รูปที่ 5. กราฟวง C_n

กำหนดให้ $A \in S(C_n)$ พิจารณาจุดยอด n ในกราฟ C_n โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 : $n \notin A$ แล้วจะได้ว่า $|\{A \in S(C_n) \mid n \notin A\}| = |S(P_{n-1})| = f(P_{n-1})$

กรณีที่ 2 : $n \in A$ แล้วจะได้ว่า $1, n-1 \notin A$

ฉะนั้น $|\{A \in S(P_n) \mid n \in A\}| = |S(P_{n-3})| = f(P_{n-3})$

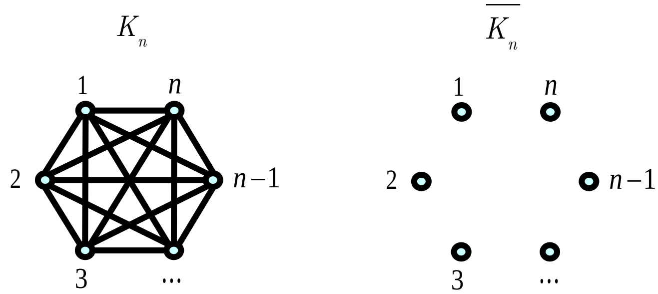
ดังนั้น $f(C_n) = f(P_{n-1}) + f(P_{n-3}) = F_{n+1} + F_{n-1}$

จากบทตั้งที่ 2 จึงทำให้สรุปได้ว่า $f(C_n) = L_{n+1}$ ❑

ต่อไปจะทำการพิจารณาจำนวนฟีโบนักชีของกราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph) ซึ่งเป็นกราฟที่แต่ละจุดในกราฟมีเส้นเชื่อมหากันหมด รวมถึงพิจารณาจำนวนฟีโบนักชีของกราฟที่แต่ละจุดในกราฟไม่มีเส้นเชื่อมหากันเลย ซึ่งจะได้ค่าออกมาดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 $f(K_n) = n+1$ และ $f(\overline{K_n}) = 2^n$ เมื่อ K_n คือกราฟแบบบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด และ $\overline{K_n}$ คือกราฟที่มีจำนวนจุดยอด n จุดโดยที่แต่ละจุดในกราฟไม่มีเส้นเชื่อมหากันเลย

บทพิสูจน์



รูปที่ 6. กราฟ K_n และ $\overline{K_n}$

เนื่องจากแต่ละจุดในกราฟ K_n มีเส้นเชื่อมหากันหมด จึงได้ว่า $S(K_n) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ ดังนั้น $f(K_n) = |S(K_n)| = n+1$ และเนื่องจากแต่ละจุดในกราฟ $\overline{K_n}$ ไม่มีเส้นเชื่อมหากันเลย จึงได้ว่า $S(\overline{K_n}) = P(\{1, 2, 3, \ldots, n\})$ โดยที่ $P(\{1, 2, 3, \ldots, n\})$ คือเซตกำลัง (power set) ของเซต $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ดังนั้น $f(\overline{K_n}) = |S(\overline{K_n})| = 2^n$ ❑

หมายเหตุ กำหนดให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟ โดยที่ $V(G_1) = V(G_2)$ และ $E(G_1) \subseteq E(G_2)$ แล้วจะได้ว่า $S(G_2) \subseteq S(G_1)$ ดังนั้น $f(G_2) \leq f(G_1)$

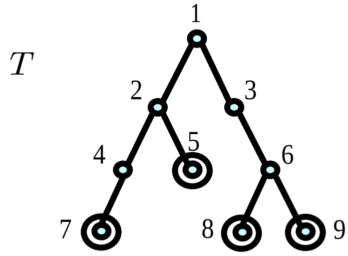
ทฤษฎีบทที่ 5 กำหนดให้ G เป็นกราฟที่มีจำนวนจุดยอด n จุด แล้วจะได้ว่า $n+1 \leq f(G) \leq 2^n$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $V(G) = V(K_n) = V(\overline{K_n})$ และ $E(\overline{K_n}) \subseteq E(G) \subseteq E(K_n)$

ดังนั้น $f(K_n) \leq f(G) \leq f(\overline{K_n})$ โดยทฤษฎีบทที่ 4 จะได้ว่า $n+1 \leq f(G) \leq 2^n$ ❑

กราฟต้นไม้ (tree) คือ กราฟเชื่อมโยง (connected graph) ซึ่งไม่มีกราฟย่อยเป็นกราฟวง และเรียกจุดยอดที่มีดีกรี 1 (จุดปลาย) ในกราฟต้นไม้ว่า **ใบ (leaf)**

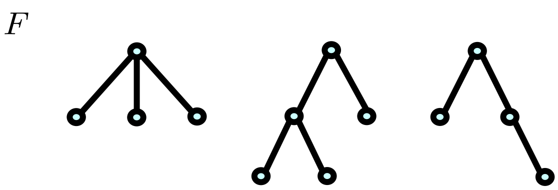
ตัวอย่างที่ 3



รูปที่ 7. กราฟต้นไม้ T

จะเห็นได้ว่ากราฟ T ในรูปที่ 7 เป็นกราฟเชื่อมโยงซึ่งไม่มีกราฟย่อยที่เป็นกราฟวง ฉะนั้นจึงได้ว่า T เป็นกราฟต้นไม้ โดยมีใบอยู่ทั้งหมด 4 ใบ คือ จุดยอด 5, 7, 8, 9 ❑

กราฟป่าไม้ (forest) คือ กราฟที่ไม่มีกราฟย่อยเป็นกราฟวง ซึ่งจะได้ว่าแต่ละส่วนประกอบ (component) ของกราฟป่าไม้จะเป็นกราฟต้นไม้ ยกตัวอย่างเช่น กราฟ F ในรูปที่ 8



รูปที่ 8. กราฟป่าไม้ F

ในทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงค่าขอบเขตของจำนวนฟีโบนักชีของกราฟต้นไม้ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด

ทฤษฎีบทที่ 6 กำหนดให้ T เป็นกราฟต้นไม้ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด แล้ว $F_{n+2} \le f(T) \le 2^{n-1}+1$

บทพิสูจน์ 1) จะพิสูจน์ว่า $f(T) \le 2^{n-1}+1$ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนค่าของ n

<u>ขั้นฐาน</u> : $n = 1$ หรือ 2

ถ้า $n = 1$ แล้ว $T = P_1$ ดังนั้น $f(T) = 2 = 2^{1-1}+1$

ถ้า $n = 2$ แล้ว $T = P_2$ ดังนั้น $f(T) = 3 = 2^{2-1}+1$

<u>ขั้นอุปนัย</u> : $n \ge 3$

สมมติให้ $f(T') \le 2^{n'-1}+1$ สำหรับทุกกราฟต้นไม้ T' ซึ่งมีจำนวนจุดยอด n' จุด โดยที่ $n' < n$

กำหนดให้ v เป็นใบของกราฟ T และ $A \in S(T)$

กรณีที่ 1 : $v \notin A$

พิจารณากราฟ $T-\{v\}$ (กราฟ T ซึ่งตัดจุดยอด v ออกไป)

จะได้ว่า $T-\{v\}$ เป็นกราฟต้นไม้ซึ่งมีจำนวนจุดยอด $n-1$ จุด

โดยสมมติฐานของการอุปนัย (induction hypothesis) จะได้ว่า

$$|\{A \in S(T) \mid v \notin A\}| = f(T-\{v\}) \le 2^{n-2}+1$$

กรณีที่ 2 : $v \in A$

สมมติให้ w เป็นจุดยอดใน T ซึ่งมีเส้นเชื่อมกับ v แล้ว $w \notin A$

พิจารณากราฟ $T-\{v, w\}$ ซึ่งมีจำนวนจุดยอด $n-2$ จุด

โดยทฤษฎีบทที่ 5 จะได้ว่า

$$|\{A \in S(T) \mid v \in A\}| = f(T-\{v, w\}) \le 2^{n-2}$$

จากกรณีที่ 1 และ 2 ทำให้ได้ว่า

$$f(T) = |\{A \in S(T) \mid v \notin A\}| + |\{A \in S(T) \mid v \in A\}|$$
$$\le (2^{n-2}+1) + (2^{n-2}) = 2^{n-1}+1$$

2) จะพิสูจน์ว่า $f(T) \geq F_{n+2}$ สำหรับทุกกราฟป่าไม้ T ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนค่าของ n

<u>ขั้นฐาน</u> : $n = 1$ หรือ 2

ถ้า $n = 1$ แล้ว $T = P_1$ ดังนั้น $f(T) = 2 = F_3$

ถ้า $n = 2$ แล้ว $T = P_2$ หรือ $T = \overline{K_2}$ ซึ่งได้ว่า

$f(P_2) = 3 = F_4$ และ $f(\overline{K_2}) = 4 \geq 3 = F_4$

<u>ขั้นอุปนัย</u> : $n \geq 3$

สมมติให้ $f(T') \geq F_{n+2}$ สำหรับทุกกราฟป่าไม้ T' ซึ่งมีจำนวนจุดยอด n' จุด โดยที่ $n' < n$ กำหนดให้ v เป็นใบของกราฟ T และ $A \in S(T)$

กรณีที่ 1 : $v \notin A$

เนื่องจาก $T - \{v\}$ เป็นกราฟป่าไม้ซึ่งมีจำนวนจุดยอด $n-1$ จุด โดยสมมติฐาน จึงได้ว่า

$$|\{A \in S(T) \mid v \notin A\}| = f(T - \{v\}) \geq F_{n+1}$$

กรณีที่ 2 : $v \in A$

สมมติให้ w เป็นจุดยอดใน T ซึ่งมีเส้นเชื่อมกับ v แล้ว $w \notin A$

เนื่องจาก $T - \{v, w\}$ เป็นกราฟป่าไม้ซึ่งมีจำนวนจุดยอด $n-2$ จุด โดยสมมติฐาน จึงได้ว่า

$$|\{A \in S(T) \mid v \in A\}| = f(T - \{v, w\}) \geq F_n$$

จากกรณีที่ 1 และ 2 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} f(T) &= |\{A \in S(T) \mid v \notin A\}| + |\{A \in S(T) \mid v \in A\}| \\ &\geq F_{n+1} + F_n = F_{n+2} \end{aligned}$$

เนื่องจากทุกกราฟต้นไม้เป็นกราฟป่าไม้ ดังนั้น $f(T) \geq F_{n+2}$ สำหรับทุกกราฟต้นไม้ T ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด ❑

บทสรุป

บทความนี้ได้นำเสนอเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนักชีของกราฟ ซึ่งพบว่าจำนวนฟีโบนักชีของกราฟวิถีจะมีความสัมพันธ์กับจำนวนฟีโบนักชี และจำนวนฟีโบนักชีของกราฟวงจะมีความสัมพันธ์กับจำนวนลูคัส สำหรับกราฟ G ใด ๆ ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด จะได้ว่า $n+1 \le f(G) \le 2^n$ และสำหรับกราฟต้นไม้ T ใด ๆ ที่มีจำนวนจุดยอด n จุดนั้น ค่าขอบเขตของจำนวนฟีโบนักชีของกราฟต้นไม้ T คือ $F_{n+2} \le f(T) \le 2^{n-1}+1$

เอกสารอ้างอิง

นิตย์ รื่นรมย์, (2545) ทฤษฎีกราฟ, พิมพ์ครั้งที่ 1, สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง, กรุงเทพฯ, 232 หน้า.
วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี, (2558) เลโอนาร์โด ฟีโบนัชชี, ที่มา: https://th.wikipedia.org/wiki/เลโอนาร์โด_ฟีโบนัชชี, สืบค้น 7 มีนาคม 2558.
ศักดา บุญโต, (2547) ลำดับฟีโบนักชีและอัตราส่วนทอง, ศิลปะการพิมพ์, กรุงเทพฯ, 93 หน้า.
Prodinger H. and Tichy R.F. (1982), Fibonacci numbers of graphs. Fibonacci Quart., 20(1):16–21.
West D.B., (2001) Introduction to graph theory, 2nd edition, Prentice Hall, New Jersey, 588 P.