บทความวิชาการ

การประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์

ชัชวาลย์ กองน้ำ*
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08–3361–6345 อีเมล: ch.kongnam@gmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2018.09.006
รับเมื่อ 10 ตุลาคม 2560 ตอบรับเมื่อ 30 มกราคม 2561 เผยแพร่ออนไลน์ 12 กันยายน 2561

บทคัดย่อ

แนวคิดวิธีของเซิลล์ถูกนำมาใช้เพื่อพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยอาศัยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร เพื่อทำให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของเซิลล์มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม และในบทความนี้มีจุดประสงค์เพื่อนำเสนอให้เห็นถึงวิธีการของเซิลล์ และยกตัวอย่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่ใช้วิธีการของเซิลล์มาพัฒนาตัวประมาณค่า ได้แก่ ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย และตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย

คำสำคัญ: ค่าเฉลี่ยประชากร, สัมประสิทธิ์การแปรผัน, ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย, ประสิทธิภาพสัมพัทธ์, การสุ่มตัวอย่าง

การอ้างอิงบทความ: ชัชวาลย์ กองน้ำ, "การประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 28, ฉบับที่ 4, หน้า 893–900, ต.ค.–ธ.ค. 2561.

Academic Article

Estimating the Population Mean Using Searls Approach

Chatchawan Kongnam*
Department of Statistics, Faculty of Science, Ramkhamhaeng University, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 08–3361–6345, E–mail: ch.kongnam@gmail.com
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2018.09.006
Received 10 December 2017; Accepted 30 January 2018; Published online: 12 September 2018

Abstract

The Searls approach was employed to develop the estimation of population mean based on the coefficient of variation of the known population. This approach leads to a higher efficiency of the Searls estimator than that of the traditional one. This article presents the Searls approach's methods and provides examples of the population mean estimators using the Searls approach: the estimator using the Searls approach for simple random sampling without replacement and the estimator using the Searls approach for single-stage cluster sampling with simple random sampling without replacement

Keywords: Population Mean, Coefficient of Variation, Mean Square Error, Relative Efficiency, Sampling

Please cite this article as: C. Kongnam, "Estimating the population mean using Searls approach," *The Journal of KMUTNB*, vol. 28, no. 4, pp. 893–900, Oct.–Dec. 2018 (in Thai).

1. บทนำ

การประมาณค่า (Estimation) [1] คือการใช้ข้อมูลจากตัวอย่างสุ่มในรูปของค่าสถิติเพื่อประมาณหรือคาดหมายว่าพารามิเตอร์ (Parameter) หรือลักษณะเฉพาะบางประการของประชากรควรมีค่าเท่าใด สำหรับการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร จึงเป็นการนำข้อมูลจากตัวอย่างที่ได้มาจากการสุ่มมาหาค่าเฉลี่ยด้วยวิธีการทางสถิติเพื่อนำไปสู่การสรุปผลถึงค่าเฉลี่ยประชากร (Population Mean)

เมื่อกำหนดให้ y_i เป็นค่าสังเกตที่สนใจศึกษา จากหน่วยสังเกตที่ i โดยที่ $i = 1, 2,..., n$ ของตัวอย่าง จากตัวอย่างสุ่มขนาด n จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) ของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้เป็น $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิมและเป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไป

Searls [2] ได้พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรขึ้นมาจากตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม $(\bar{y})$ ด้วยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation) ของประชากร ทำให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม แต่ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง (Biased Estimator) ส่วนตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิมเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง [3] ดังนั้นวิธีของเซิลล์นั้นยอมให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรเป็นตัวประมาณที่เอนเอียง เพื่อให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error; MSE) ต่ำลง ทำให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่ได้นั้นมีประสิทธิภาพดีขึ้น

แนวคิดวิธีของเซิลล์เป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในเรื่องทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling Theory) ซึ่งวัตถุประสงค์ของบทความนี้เพื่ออธิบายให้เห็นถึงวิธีการของเซิลล์และการนำมาใช้พัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร และหัวข้อถัดไปได้กล่าวถึงตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย และตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ตามลำดับ

2. ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์

Searls [2] ได้เสนอตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรซึ่งอาศัยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร เมื่อกำหนดให้ y_i เป็นค่าสังเกตที่สนใจศึกษา จากหน่วยสังเกตที่ i โดยที่ $i = 1, 2,..., n$ ของตัวอย่าง จากตัวอย่างสุ่มขนาด n และทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร (C_y) จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบเซิลล์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้ดังสมการที่ (1)

$$\bar{y}_s = \frac{1}{\left(n + C_y^2\right)}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (1)$$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_s$ เขียนได้ดังสมการที่ (2)

$$\text{MSE}\left(\bar{y}_s\right) = \frac{S_y^2}{\left(n + C_y^2\right)} \qquad (2)$$

โดยที่ S_y^2 คือ ความแปรปรวนของประชากร

ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของตัวประมาณ $\bar{y}_s$ เทียบกับตัวประมาณ $\bar{y}$ เมื่อค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}$ มีค่าเท่ากับ $\text{MSE}(\bar{y})$ เขียนได้ดังสมการที่ (3)

$$\text{R.E.} = \frac{\text{MSE}\left(\bar{y}\right)}{\text{MSE}\left(\bar{y}_s\right)} = \frac{\left(n + C_y^2\right)}{n} \qquad (3)$$

พบว่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของตัวประมาณ $\bar{y}_s$ เทียบกับตัวประมาณ $\bar{y}$ มีค่ามากกว่า 1 ดังนั้นตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์จึงมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม และสังเกตจากสมการที่ (3) ได้ว่า $\text{MSE}(\bar{y}_s)$ มีค่าน้อยกว่า $\text{MSE}(\bar{y})$ เสมอ

3. ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย

3.1 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์

Searls [2] ได้เสนอตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรซึ่งอาศัยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร และในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย (Simple Random Sampling) ขนาด n จากประชากรขนาด N โดยไม่คืนที่ และทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร (C_y) จะเขียนตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ได้เป็นดังสมการที่ 4 [4]

$$\bar{y}'_s = \frac{\bar{y}}{1+\gamma C_y^2} \tag{4}$$

โดยที่ $\gamma = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$ คือ ปัจจัยปรับค่ากรณีที่ประชากรมีจำนวนที่จำกัด (Finite Population Correction)

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_s$ เขียนได้เป็นดังสมการที่ (5)

$$\text{MSE}\left(\bar{y}'_s\right) = \frac{\gamma C_y^2 \bar{Y}^2}{1+\gamma C_y^2} \tag{5}$$

ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ระหว่างตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ ($\bar{y}'_s$) กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม ($\bar{y}$) เมื่อค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}$ ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย มีค่าเท่ากับ $\gamma C_y^2 \bar{Y}^2$ เขียนได้เป็นดังสมการที่ (6)

$$\text{R.E.} = \frac{\text{MSE}\left(\bar{y}\right)}{\text{MSE}\left(\bar{y}'_s\right)} = 1+\gamma C_y^2 \tag{6}$$

พบว่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของตัวประมาณ $\bar{y}'_s$ เทียบกับตัวประมาณ $\bar{y}$ มีค่ามากกว่า 1 ดังนั้นตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์จึงมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม และสังเกตจากสมการที่ (6) ได้ว่า MSE($\bar{y}'_s$) มีค่าน้อยกว่า MSE($\bar{y}$) เสมอ

3.2 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบอัตราส่วนด้วยวิธีของเซิลล์

3.2.1 Prasad [5] ได้นำวิธีของเซิลล์มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบอัตราส่วน (Ratio Estimator) ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ขนาด n จากประชากรขนาด N โดยไม่คืนที่ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร (C_y) และค่าเฉลี่ยประชากรของตัวแปรช่วย ($\bar{X}$) จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบอัตราส่วนด้วยวิธีของเซิลล์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้เป็นดังสมการที่ (7)

$$\bar{y}'_{ps} = \frac{\bar{y}'_s}{\bar{x}} \bar{X} \tag{7}$$

โดยที่ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ เป็นตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรของตัวแปรช่วย เมื่อ x_i เป็นค่าสังเกตของตัวแปรช่วย จากหน่วยสังเกตที่ i โดยที่ $i = 1, 2,..., n$ ของตัวอย่าง

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{ps}$ เขียนได้เป็นดังสมการที่ (8)

$$\text{MSE}\left(\bar{y}'_{ps}\right) \approx \gamma \bar{Y}^2 \left[\omega^*\left(C_y^2 - 2\rho_{xy} C_y C_x\right) + C_x^2\right] \tag{8}$$

โดยที่ $\omega^* = \frac{1}{\left(1+\gamma C_y^2\right)}$

ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ระหว่างตัวประมาณ $\bar{y}'_{ps}$ กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบอัตราส่วนดั้งเดิม $\bar{y}_r = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X}$ [6] เมื่อค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}_r$ ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย มีค่าเท่ากับ $\gamma \bar{Y}^2 \left(C_y^2 + C_x^2 - 2\rho_{xy} C_y C_x\right)$ [6] เขียนได้เป็นดังสมการที่ (9)

$$\text{R.E.} = \frac{\text{MSE}\left(\bar{y}_r\right)}{\text{MSE}\left(\bar{y}'_{ps}\right)} = \frac{C_y^2 + C_x^2 - 2\rho_{xy} C_y C_x}{\omega^*\left(C_y^2 - 2\rho_{xy} C_y C_x\right) + C_x^2} \tag{9}$$

จากสมการที่ (9) จะได้ว่าตัวประมาณ $\bar{y}'_{ps}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ $\bar{y}_r$ ภายใต้เงื่อนไข $\rho_{xy} < \frac{1}{2}\frac{C_y}{C_x}$ เมื่อ ρ_{xy} เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของค่าสังเกตของตัวแปรช่วยและตัวแปรที่สนใจศึกษา C_y เป็น

ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรและ C_x เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวแปรช่วย

3.2.2 Jitthavech and Lorchirachoonkul [7] ได้นำวิธีของเซิลล์มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบอัตราส่วน ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ขนาด n จากประชากรขนาด N โดยไม่คืนที่ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร (C_y) และค่าเฉลี่ยประชากรของตัวแปรช่วย ($\bar{X}$) จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบอัตราส่วนด้วยวิธีของเซิลล์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้เป็นดังสมการที่ (10)

$$\bar{y}'_{rs} = \frac{\bar{y}'_s}{\bar{x}'_s}\bar{X} \tag{10}$$

โดยที่ $\bar{x}'_s = \dfrac{\bar{x}}{1+\gamma C_x^2}$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{rs}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง (First-order Taylor Series Approximation) เขียนได้เป็นดังสมการที่ (11)

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}'_{rs}) \approx \left(\frac{1+\gamma C_x^2}{1+\gamma C_y^2}\right)^2 \mathrm{MSE}(\bar{y}_r) \tag{11}$$

โดยที่ $\mathrm{MSE}(\bar{y}_r) \approx \gamma\bar{Y}^2\left(C_y^2 + C_x^2 - 2\rho_{xy}C_yC_x\right)$ [6]

ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ระหว่างตัวประมาณ $\bar{y}'_{rs}$ กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบอัตราส่วนดั้งเดิม ($\bar{y}_r$) เขียนได้เป็นดังสมการที่ (12)

$$\mathrm{R.E.} = \frac{\mathrm{MSE}(\bar{y}_r)}{\mathrm{MSE}(\bar{y}'_{rs})} = \left(\frac{1+\gamma C_y^2}{1+\gamma C_x^2}\right)^2 \tag{12}$$

จากสมการที่ (12) จะได้ว่าตัวประมาณ $\bar{y}'_{rs}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบอัตราส่วนดั้งเดิม ($\bar{y}_r$) ภายใต้เงื่อนไข $C_x < C_y$ เมื่อ C_y เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากรและ C_x เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของตัวแปรช่วย

3.3 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยแบบถดถอยเชิงเส้นด้วยวิธีของเซิลล์

Jitthavech and Lorchirachoonkul [7] ได้นำวิธีของเซิลล์มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression Estimator) ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ขนาด n จากประชากรขนาด N โดยไม่คืนที่ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร (C_y) และค่าเฉลี่ยประชากรของตัวแปรช่วย ($\bar{X}$) จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบถดถอยเชิงเส้นด้วยวิธีของเซิลล์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้เป็นดังสมการที่ (13)

$$\bar{y}'_{lrs} = \bar{y}'_s + b_s\left(\bar{X} - \bar{x}'_s\right) \tag{13}$$

โดยที่ $\bar{x}'_s = \dfrac{\bar{x}}{1+\gamma C_x^2},\ b_s = \dfrac{1+\gamma C_x^2}{1+\gamma C_y^2}b$ และ $b = \rho_{xy}\dfrac{S_y}{S_x}$ [6]

เมื่อ S_x คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรช่วยและ S_y คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรที่สนใจศึกษา

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrs}$ ภายใต้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ถึงอันดับที่หนึ่ง เขียนได้เป็นดังสมการที่ (14)

$$\mathrm{MSE}(\bar{y}'_{lrs}) \approx \frac{\mathrm{MSE}(\bar{y}_{lr})}{\left(1+\gamma C_y^2\right)^2} \tag{14}$$

โดยที่ $\mathrm{MSE}(\bar{y}_{lr}) \approx \gamma C_y^2\bar{Y}^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$ [6]

ประสิทธิภาพสัมพัทธ์ระหว่างตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrs}$ กับตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบถดถอยเชิงเส้นแบบดั้งเดิม $\bar{y}_{lr} = \bar{y} + b\left(\bar{X} - \bar{x}\right)$ [6] เขียนได้เป็นดังสมการที่ (15)

$$\mathrm{R.E.} = \frac{\mathrm{MSE}(\bar{y}_{lr})}{\mathrm{MSE}(\bar{y}'_{lrs})} = \left(1+\gamma C_y^2\right)^2 \tag{15}$$

พบว่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrs}$ เทียบกับตัวประมาณ $\bar{y}_{lr}$ มีค่ามากกว่า 1 ดังนั้นตัวประมาณ $\bar{y}'_{lrs}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร

แบบถดถอยเชิงเส้นแบบดั้งเดิม ($\bar{y}_{lr}$) และสังเกตจากสมการที่ (15) ได้ว่า $\text{MSE}(\bar{y}'_{lrs})$ มีค่าน้อยกว่า $\text{MSE}(\bar{y}_{lr})$ เสมอ และจากผลการศึกษาในงานวิจัย พบว่าตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นที่ถูกพัฒนาขึ้นด้วยวิธีของเซิลล์มีประสิทธิภาพมากที่สุด ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ไม่คืนที่

3.4 ผลลัพธ์จากข้อมูลเชิงตัวเลข

เมื่อนำตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนาด้วยวิธีของเซิลล์มาคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยโดยใช้ข้อมูลของ Kadilar and Cingi [8] ซึ่งมีค่าสรุปของข้อมูลดังนี้

$N = 106,\ n = 20,\ \bar{Y} = 15.37,\ \bar{X} = 243.76,$

$\rho_{xy} = 0.82,\ C_y = 4.18,\ C_x = 2.02$

จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ไม่คืนที่ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ในการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย ไม่คืนที่

ตัวประมาณ	MSE
$\bar{y}$	167.4414
$\bar{y}'_s$	97.9885
$\bar{y}_r$	73.8414
$\bar{y}'_{ps}$	59.4324
$\bar{y}'_{rs}$	34.3533
$\bar{y}_{lr}$	54.8538
$\bar{y}'_{lrs}$	18.7859

จากผลลัพธ์ในตารางที่ 1 พบว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของเซิลล์มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม และตัวประมาณแบบถดถอยเชิงเส้นที่ถูกพัฒนาขึ้นด้วยวิธีของเซิลล์มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด

4. ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย

4.1 ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์

Chatchawan *et al.* [3] ได้นำวิธีของเซิลล์มาพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย (Single-stage Cluster Sampling) ไม่คืนที่ และแต่ละกลุ่มมีขนาดไม่เท่ากัน

เมื่อพิจารณาแบ่งประชากรออกเป็น N กลุ่ม ที่มีขนาดของกลุ่ม M_i หน่วย โดยที่ $i = 1, 2,..., N$ และกำหนดให้ y_{ij} เป็นค่าสังเกตที่สนใจศึกษาจากหน่วยสังเกตที่ j ในกลุ่มที่ i ของประชากร โดยที่ $j = 1, 2,..., M_i$, $i = 1, 2,..., N$ จะได้ $Y_i = \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}, \bar{Y}_i = \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}$ เป็นค่ายอดรวม และค่าเฉลี่ยของกลุ่ม ในกลุ่มที่ i ตามลำดับ $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{\sum_{i=1}^{N} M_i}$ เป็นค่าเฉลี่ยประชากร และ $\bar{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} M_i, \bar{\bar{Y}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{Y}_i$ เป็นขนาดเฉลี่ยของกลุ่ม และค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยของกลุ่มในประชากรตามลำดับ

ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ขนาด n กลุ่ม จากประชากรขนาด N กลุ่ม โดยไม่คืนที่ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่มในประชากร ($C_{\bar{Y}}$) และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของขนาดของกลุ่มในประชากร (C_M) เป็นตัวที่ทราบค่า จะได้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยวิธีของเซิลล์ที่เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ เขียนได้ดังสมการที่ (16)

$$\bar{y}'_{cs} = \left(\frac{1}{1+\gamma C_{\bar{Y}}^2}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}_i}{n} \tag{16}$$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ $\bar{y}'_{cs}$ เขียนได้ดังสมการที่ (17)

$$\text{MSE}\left(\bar{y}'_{cs}\right) = \text{MSE}\left(\bar{y}_c\right) - \left[\frac{\gamma^2 C_{\bar{Y}}^4 \bar{\bar{Y}}^2}{\left(1+\gamma C_{\bar{Y}}^2\right)} - 2\left(\frac{N-1}{N}\right)\rho_{\bar{Y}M}\frac{\gamma C_M C_{\bar{Y}}^3 \bar{\bar{Y}}^2}{\left(1+\gamma C_{\bar{Y}}^2\right)}\right] \tag{17}$$

โดยที่ $\mathrm{MSE}\left(\bar{y}_c\right)=\gamma C_{\bar{Y}}^2\bar{\bar{Y}}^2+\left(\frac{N-1}{N}\right)^2\rho_{\bar{Y}M}^2 C_{\bar{Y}}^2 C_M^2\bar{\bar{Y}}^2$ [9]

ตัวประมาณ $\bar{y}'_{cs}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม $\bar{y}_c=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}_i$ [9] ภายใต้เงื่อนไข $\rho_{\bar{Y}M}<\frac{\gamma C_{\bar{Y}}}{2\left(\frac{N-1}{N}\right)C_M}$ เมื่อ $\rho_{\bar{Y}M}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยของกลุ่มและขนาดของกลุ่มในประชากร $C_{\bar{Y}}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่มและ C_M เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของขนาดของกลุ่ม

จากผลการศึกษาในงานวิจัย เมื่อไม่ทราบค่า $C_{\bar{Y}}$ และ C_M ของประชากร และประมาณค่าจากตัวอย่างด้วยค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าเฉลี่ยของกลุ่มของตัวอย่าง ($\hat{C}_{\bar{Y}}$) และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของขนาดของกลุ่มของตัวอย่าง ($\hat{C}_M$) พบว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของเซิลล์มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิมเช่นเดียวกัน ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่

4.2 ผลลัพธ์จากข้อมูลเชิงตัวเลข

เมื่อนำตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนาด้วยวิธีของเซิลล์มาคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยโดยใช้ข้อมูลจากหนังสือของ Sukhatme [10] หน้า 278 ซึ่งมีค่าสรุปของข้อมูล ดังนี้

N = 89, n = 20, $\bar{Y}$ = 328.02, $\bar{\bar{Y}}$ = 387.28,

$\rho_{\bar{Y}M}$ = -0.37, $C_{\bar{Y}}$ = 0.70, C_M = 0.60

จะได้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ในการเลือกตัวอย่างแบบกลุ่มขั้นเดียวแบบง่าย ไม่คืนที่

ตัวประมาณ	MSE
$\bar{y}_c$	6374.9099
$\bar{y}'_{cs}$	5461.5315

จากผลลัพธ์ในตารางที่ 2 พบว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของเซิลล์มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม

5. สรุป

การพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้วิธีการของเซิลล์ ซึ่งอาศัยแนวคิดที่ต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของประชากร ช่วยทำให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบใหม่ด้วยวิธีของเซิลล์ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิม ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรบางตัวที่พัฒนามาจากวิธีของเซิลล์มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิมเสมอ ได้แก่ ตัวประมาณ $\bar{y}_s$, $\bar{y}'_s$ และ $\bar{y}'_{lrs}$ และตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรบางตัวจะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบดั้งเดิมก็ต่อเมื่อตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรที่พัฒนามาจากวิธีของเซิลล์นั้นอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่หามาได้ ซึ่งได้แก่ ตัวประมาณ $\bar{y}'_{ps}$, $\bar{y}'_{rs}$ และ $\bar{y}'_{cs}$ และแนวคิดวิธีของเซิลล์เป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในเรื่องทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง และสามารถเป็นแนวทางสำหรับพัฒนาตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรในการเลือกตัวอย่างด้วยวิธีอื่นๆ นอกเหนือจากที่นำเสนอข้างต้น เพื่อให้ตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากรมีประสิทธิภาพดีขึ้นต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] P. Suwutthee, *Statistical Inference Theory*, 3rd ed. Bangkok: WVO Officer of Printing Mill, 2010, pp. 57 (in Thai).

[2] D. T. Searls, “The utilization of a known coefficient of variation in the estimation procedure,” *American Statistical Association Journal*, vol. 56, pp. 1225–1226, 1964.

[3] C. Kongnam, J. Jitthavech, and V. Lorchirachoonkul, “Estimator in single-stage cluster sampling: Searls approach,” *Burapha Science Journal*,

vol. 22, no. 1, pp. 135–150, 2017 (in Thai).

[4] H. Cingi and C. Kadilar, *Advances in Sampling Theory - Ratio Method of Estimation*, Bentham Science Publishers, 2009.

[5] B. Prasad, "Some improved ratio type estimators of population mean and ratio in finite population sample surveys," *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 18, no. 1, pp. 379–392, 1989.

[6] W. G. Cochran, *Sampling Techniques*, 3rd ed. New York: John Wiley and Sons, 1977.

[7] J. Jitthavech and V. Lorchirachoonkul, "Estimators in simple random sampling: Searls approach," *Songklanakarin Journal of Science and Technology*, vol. 35, no. 6, pp. 749–760, November–December 2013.

[8] C. Kadilar and H. Cingi, "A study on the chain ratio - type estimator," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 32, pp. 105–108, 2003.

[9] A. K. Gupta and D. G. Kabe, *Theory of Sample Surveys*. Singapore: World Scientific Publishing, 2011.

[10] P.V. Sukhatme, *Sampling Theory of Surveys with Applications*. Iowa: Iowa State University Press, 1954, pp. 278.