วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ปีที่ 30, ฉบับที่ 2 เม.ย.–มิ.ย. 2563
The Journal of KMUTNB., Vol. 30, No. 2, Apr.–Jun. 2020

บทความวิจัย

ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น

นราธิป อิสรานุสรณ์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08 6966 7567 อีเมล: jo_zag11@hotmail.com
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.01.001
รับเมื่อ 8 กรกฎาคม 2562 แก้ไขเมื่อ 23 สิงหาคม 2562 ตอบรับเมื่อ 13 กันยายน 2562 เผยแพร่ออนไลน์ 7 มกราคม 2563

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น และ 2) เพื่อแสดงลักษณะกราฟของผลตอบแทนจากการออมเงินเมื่อครบสิ้นปี ที่คำนวณได้จากตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีเปรียบเทียบกับตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี จากผลการวิจัยทำให้ได้ 1) ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น โดยมีตัวแปร คือ จำนวนเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนครั้งของการออมเงิน ซึ่งพัฒนามาจากตัวแบบมาตรฐานของการคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้น และตรวจสอบความถูกต้องโดยใช้การพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และ 2) ลักษณะกราฟของผลตอบแทนจากการออมเงินเมื่อครบสิ้นปี ที่คำนวณได้จากการกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรค่าเดียวกันลงในตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี ตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี กราฟแสดงว่าผลตอบแทนของการออมเงินต้นปีมากกว่าผลตอบแทนของการออมเงินกลางปี และผลตอบแทนของการออมเงินกลางปีมากกว่าผลการตอบแทนของการออมเงินปลายปี

คำสำคัญ: ตัวแบบคณิตศาสตร์ ออมกลางปี อัตราดอกเบี้ยทบต้น

การอ้างอิงบทความ: นราธิป อิสรานุสรณ์, "ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 30, ฉบับที่ 2, หน้า 304–313, เม.ย.–มิ.ย. 2563.

Research Article

The Deterministic Mathematical Model for Midyear of Savings with Compound Interest Rate

Naratip Issaranusorn
Program of Mathematics, Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 08 6966 7567, E–mail: jo_zag11@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.01.001
Received 8 July 2019; Revised 23 August 2019; Accepted 13 September 2019; Published online: 7 January 2020

Abstract

The objectives of this research are 1) to create a deterministic mathematical model for midyear of savings with compound interest rate and 2) to display the characteristic of graphs of the returns those are computed from the deterministic mathematical model for midyear of savings comparing with the mathematical model for savings at the beginning and at the end of the year. From the research results 1) the deterministic mathematical model for midyear of savings with compound interest rate consisting of the variables those are present value, compound interest rate per year, the number of times of compounding and the number of times for saving which are developed from the standard compounding interest model are obtained and checked the correctness by using mathematical induction in the proof and 2) the characteristic of graphs of the returns those are obtained by computing from setting the same initial conditions of variables into the deterministic mathematical model for midyear, beginning and at the end of the year of savings. In the graphs, the returns of the beginning of the year are greater than the returns of the midyear and the returns of the midyear are greater than the returns of the end of the year.

Keywords: Mathematical Model, Midyear of Savings, Compound Interest Rate

Please cite this article as: N. Issaranusorn, "The deterministic mathematical model for midyear of savings with compound interest rate," *The Journal of KMUTNB*, vol. 30, no. 2, pp. 304–313, Apr.–Jun. 2020 (in Thai).

1. บทนำ

ในโลกปัจจุบัน "เงิน" เป็นปัจจัยที่มีความสำคัญอย่างมากต่อการดำรงชีวิตของมนุษย์ โดยแต่ละคนจะมีวิธีการและศักยภาพในการหาเงินที่แตกต่างกัน การออมเงินในกรมธรรม์ประกันชีวิต พันธบัตรออมทรัพย์ สลากออมทรัพย์ เงินฝากประเภทต่างๆ ในสถาบันการเงินหรือการซื้อขายสินทรัพย์ในตลาดทุน ต่างก็เป็นวิธีการลงทุนที่สามารถสร้างผลตอบแทนให้กับนักลงทุนได้ ซึ่งผลตอบแทนจะมากหรือน้อย กำไรหรือขาดทุน ขึ้นอยู่กับประเภทและปัจจัยหลายๆ อย่างของการลงทุน ทั้งนี้ ถ้านักลงทุนมีเครื่องมือที่ช่วยประกอบการตัดสินใจก่อนลงทุน จะทำให้นักลงทุนมีความมั่นใจในการลงทุนมากขึ้นและมีโอกาสป้องกันการขาดทุนได้

Schwartz [1] ได้สร้างตัวแบบสโตแคสติก 1 ปัจจัย เพื่อใช้ในการประมาณราคาสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคต โดยกำหนดให้ราคาสินทรัพย์อ้างอิงสอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่แบบบราวน์ และพจน์ค่าประมาณของการเปลี่ยนแปลงประกอบด้วยลอการิทึมของราคาสินทรัพย์อ้างอิง ซึ่งมีคุณสมบัติกระบวนการลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยของราคา นอกจากนี้มีการประยุกต์ใช้ตัวแบบสโตแคสติก 1 ปัจจัย ประมาณราคาสินทรัพย์อ้างอิงในตลาดซื้อขายล่วงหน้า

นราธิป และคณะ [2] ได้สร้างตัวแบบสโตแคสติก 1 ปัจจัย เพื่อใช้ประมาณราคาทองคำในอนาคต โดยพัฒนาตัวแบบมาจาก Schwartz [1] โดยกำหนดให้ราคาสินทรัพย์อ้างอิงสอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่แบบบราวน์ และพจน์ค่าประมาณของการเปลี่ยนแปลงมีคุณสมบัติกระบวนการลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยของราคาประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญซึ่งอธิบายฤดูกาลของราคาทองคำ และมีการประยุกต์ใช้ตัวแบบสโตแคสติก 1 ปัจจัย ประมาณราคาของทองคำในตลาดซื้อขายล่วงหน้าและออปชัน

ผู้วิจัยได้แนวคิดจากงานวิจัยทั้งสองเรื่องนี้ว่า ความเสี่ยงจากการลงทุนในตลาดทุน ตลาดซื้อขายล่วงหน้า มีโอกาสทำให้ผู้ลงทุนเกิดการขาดทุนได้ ดังนั้นสำหรับนักเรียน นักศึกษา บุคคลทั่วไป ที่ยังไม่สามารถยอมรับความเสี่ยงได้ ควรที่จะวางแผนการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำ หรือไม่มีความเสี่ยง นั่นก็คือ การออมเงินในสถาบันการเงิน ซึ่งการออมเงินจะให้ผลตอบแทน ที่เรียกว่า ดอกเบี้ย โดยแนวคิดนี้ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงิน เพื่อให้ผู้ออมสามารถคำนวณจำนวนเงินที่จะได้รับในอนาคตได้ ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาตัวแบบมาตรฐานในเรื่องการคิดอัตราดอกเบี้ย จาก Hull [3] ซึ่งได้แสดงตัวแบบมาตรฐานสำหรับการคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้น แสดงดังสมการที่ (1)

$$S = A\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \tag{1}$$

เมื่อ S แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n

A แทน จำนวนเงินที่ต้องการออม

i แทน อัตราดอกเบี้ยต่อปี

m แทน จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี

n แทน ระยะเวลา (ปี) ในการออมเงิน

ธีรวัฒน์ [4] ได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานและส่วนประกอบต่างๆ ของตัวแบบคณิตศาสตร์ รวมถึงวิธีการและขั้นตอนต่างๆ ในการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ที่จะทำให้ตัวแบบที่สร้างขึ้นใกล้เคียงกับความเป็นจริง เพื่อสามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริงได้

Li และ He [5] ได้ศึกษาการเพิ่มขึ้นของมูลค่าเงินในอนาคตด้วยวิธีการคิดดอกเบี้ยเชิงเดียวและทบต้น รวมถึงพิสูจน์ความถูกต้องของคำตอบที่ได้ด้วยทฤษฎีบทของโรลล์

นราธิป [6] ได้สร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงิน 4 ตัวแบบ โดยมีการออมเงินต้นปีและปลายปี ด้วยจำนวนเงินปัจจุบันแบบคงที่กับอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่และไม่คงที่ ด้วยวิธีการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น โดยมีตัวแปร 4 ตัวแปร คือ จำนวนเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนครั้งของการออมเงิน เพื่อใช้เปรียบเทียบผลตอบแทนจากการออมในรูปแบบประกันชีวิตที่มีการส่งเบี้ยประกันรายปี ซึ่งต้องส่งเบี้ยประกันแบบคงที่ให้ครบตามสัญญา หรือสลากออมทรัพย์ที่ออมแบบคงที่ เป็นต้น

นราธิป [7] ได้สร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงิน 4 ตัวแบบ ซึ่งพัฒนามาจากนราธิป [6] โดยมีการออมเงินต้นปีและปลายปี ด้วยจำนวนเงินปัจจุบันแบบไม่คงที่กับอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่และไม่คงที่ ด้วยวิธีการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น

เพื่อใช้เปรียบเทียบผลตอบแทนจากการออมประเภทเงินฝากประจำแบบออมไม่คงที่ หรือรูปแบบประกันชีวิตที่ออมหลายกรมธรรม์ด้วยเบี้ยประกันแบบไม่คงที่ เป็นต้น

ดังนั้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะสร้างเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้คำนวณจำนวนเงินที่จะได้รับในอนาคต ตลอดจนช่วยวิเคราะห์ ตัดสินใจ วางแผนการออมเงินในสถาบันการเงิน โดยมีวัตถุประสงค์ คือ 1) เพื่อสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น โดยมีตัวแปร คือ จำนวนเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนครั้งของการออมเงิน และ 2) เพื่อแสดงลักษณะกราฟของผลตอบแทนจากการออมเงินเมื่อครบสิ้นปี ที่คำนวณได้จากตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีเปรียบเทียบกับตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี ขอบเขตของการวิจัย คือ สร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี โดยออมเงินปีละ 1 ครั้ง ทุกๆ กลางปี ด้วยจำนวนเงินปัจจุบันหรือจำนวนเงินออมกลางปีกับอัตราดอกเบี้ยทบต้นแบบคงที่และไม่คงที่ในแต่ละปี และมีจำนวนครั้งของการทบต้นเท่ากันทุกปี อย่างน้อยปีละ 2 ครั้ง

2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงประยุกต์ ซึ่งมีประโยชน์ในการพัฒนาองค์ความรู้ทางด้านการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ และสามารถนำผลงานวิจัยไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน รวมถึงช่วยในการวิเคราะห์ เปรียบเทียบผลตอบแทนจากการออมเงินจากสถาบันการเงินต่างๆ ทั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างทฤษฎีบท และพิสูจน์ทฤษฎีบท เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบที่สร้างขึ้น โดยใช้หลักการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ซึ่งมีวิธีดำเนินการวิจัย ดังนี้

1. ศึกษาความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีดอกเบี้ยและการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์

2. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการออมเงินที่ใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์ มาช่วยแก้ปัญหา

3. ทำความเข้าใจปัญหาเพื่อกำหนดวัตถุประสงค์ในการสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์

4. สร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ประเภทตัวแบบเชิงกำหนด ซึ่งพัฒนามาจากงานวิจัยที่ศึกษา และพิสูจน์ความถูกต้องของตัวแบบที่สร้างขึ้น

5. กำหนดตัวแปรเพื่อใช้คำนวณหาผลลัพธ์ของตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนด ซึ่งผลลัพธ์ดังกล่าว คือ จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีใดๆ

6. วิเคราะห์ และสรุปผลที่ได้

7. สังเคราะห์ผลสรุป เพื่อให้เกิดองค์ความรู้ที่จะนำไปใช้ในชีวิตจริง รวมถึงเป็นแนวทางที่จะทำวิจัยต่อไป

3. ผลการวิจัย

3.1 ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีสำหรับใช้คำนวณหาจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีใดๆ

ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีประกอบด้วยตัวแปร คือ จำนวนเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนครั้งของการออมเงิน ดังนี้

n แทน จำนวนครั้งของการออมเงิน

R_n แทน จำนวนเงินออมกลางปี ปีที่ n

R แทน จำนวนเงินออมกลางปีแบบคงที่

i_n แทน อัตราดอกเบี้ย ปีที่ n

i แทน อัตราดอกเบี้ยแบบคงที่ต่อปี

m แทน จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี

I_n แทน $\left(1+\frac{i_n}{m}\right)$

I แทน $\left(1+\frac{i}{m}\right)$

$S_M(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการออมเงินทุกๆ กลางปี ด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่

$S_{Mi}(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการออมเงินทุกๆ กลางปี ด้วยจำนวนเงินแบบคงที่และอัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่

$S_{MR}(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการ

ออมเงินทุกๆ กลางปี ด้วยจำนวนเงินแบบไม่คงที่และอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่

$S_{MRi}(n)$ แทน จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ n จากการออมเงินทุกๆ กลางปี ด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่

จากตัวแบบมาตรฐานใน Hull [3] และจากการศึกษางานวิจัย นราธิป [6], [7] ทำให้ผู้วิจัยสนใจสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินจากการออมเงินทุกๆ กลางปี และตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบที่สร้างขึ้นโดยการพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 จำนวนเงินจากการออมเงินทุกๆ กลางปีด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่

สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จะได้ดังสมการที่ (2)

$$S_M(n) = R\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1} \tag{2}$$

พิสูจน์ จากตัวแบบมาตรฐาน จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 ดังนี้

$$\begin{aligned} S_M(1) &= R\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &= R\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m(1)}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}\right) \\ &= RI^{m/2}\left(\frac{I^{m(1)}-1}{I^{m}-1}\right) \end{aligned}$$

กำหนดให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่งจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ k คือ

$$S_M(k) = RI^{m/2}\left(\frac{I^{mk}-1}{I^{m}-1}\right)$$

เนื่องจากจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปี ปีที่ $k+1$ ได้จากผลรวมของเงินรวมกลางปี ปีที่ $k+1$ กับดอกเบี้ยครึ่งปีหลังของปีที่ $k+1$ และจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} S_M(k+1) &= \left(S_M(k)I^{m/2}+R\right)I^{m/2} \\ &= \left(\left(RI^{m/2}\left(\frac{I^{mk}-1}{I^{m}-1}\right)\right)I^{m/2}+R\right)I^{m/2} \\ &= RI^{m/2}\left(\frac{I^{m(k+1)}-1}{I^{m}-1}\right) \\ &= R\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m(k+1)}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1} \quad \square \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2 จำนวนเงินจากการออมเงินทุกๆ กลางปีด้วยจำนวนเงินแบบคงที่และอัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่

สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จะได้ดังสมการที่ (3)

$$S_{Mi}(n) = R\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{i_{n-(j-1)}}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\prod_{a=1}^{j-1}\left(1+\frac{i_{n-(a-1)}}{m}\right)^{m} \tag{3}$$

พิสูจน์ จากตัวแบบมาตรฐาน จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 ดังนี้

$$\begin{aligned} S_{Mi}(1) &= R\left(1+\frac{i_1}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &= R\left(1+\frac{i_{1-(1-1)}}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &= RI_{1-(1-1)}^{m/2} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่งจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ k คือ

$$S_{Mi}(k) = R\sum_{j=1}^{k} I_{k-(j-1)}^{m/2}\prod_{a=1}^{j-1} I_{k-(a-1)}^{m}$$

เนื่องจากจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปี ปีที่ $k+1$ ได้จากผลรวมของเงินรวมกลางปี ปีที่ $k+1$ กับดอกเบี้ยครึ่งปีหลังของปีที่ $k+1$ และจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จึงได้ว่า

$$S_{Mi}(k+1)=\left(S_{Mi}(k)I_{k+1}^{m/2}+R\right)I_{k+1}^{m/2}$$
$$=\left(R\sum_{j=1}^{k}\left(I_{k-(j-1)}^{m/2}\prod_{a=1}^{j-1}I_{k-(a-1)}^{m}\right)I_{k+1}^{m/2}+R\right)I_{k+1}^{m/2}$$
$$=R\sum_{j=1}^{k+1}I_{(k+1)-(j-1)}^{m/2}\prod_{a=1}^{j-1}I_{(k+1)-(a-1)}^{m}$$
$$=R\sum_{j=1}^{k+1}\left(1+\frac{i_{(k+1)-(j-1)}}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\prod_{a=1}^{j-1}\left(1+\frac{i_{(k+1)-(a-1)}}{m}\right)^{m} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 3 จำนวนเงินจากการออมเงินทุกๆ กลางปีด้วยจำนวนเงินแบบไม่คงที่และอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่

สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จะได้ดังสมการที่ (4)

$$S_{MR}(n)=\sum_{j=1}^{n}R_{n-(j-1)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\left(j-\frac{1}{2}\right)} \tag{4}$$

พิสูจน์ จากตัวแบบมาตรฐาน จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 ดังนี้

$$S_{MR}(1)=R_1\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$$
$$=R_{1-(1-1)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$$
$$=R_{1-(1-1)}I^{m/2}$$

กำหนดให้ $k\in\mathbb{N}$ ซึ่งจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ k คือ

$$S_{MR}(k)=\sum_{j=1}^{k}R_{k-(j-1)}I^{m\left(j-\frac{1}{2}\right)}$$

เนื่องจากจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปี ปีที่ $k+1$ ได้จากผลรวมของเงินรวมกลางปี ปีที่ $k+1$ กับดอกเบี้ยครึ่งปีหลังของปีที่ $k+1$ และจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จึงได้ว่า

$$S_{MR}(k+1)=\left(S_{MR}(k)I^{m/2}+R_{k+1}\right)I^{m/2}$$
$$=\left(\left(\sum_{j=1}^{k}R_{k-(j-1)}I^{m\left(j-\frac{1}{2}\right)}\right)I^{m}+R_{k+1}I^{m/2}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}R_{(k+1)-(j-1)}I^{m\left(j-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}R_{(k+1)-(j-1)}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\left(j-\frac{1}{2}\right)} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 4 จำนวนเงินจากการออมเงินทุกๆ กลางปีด้วยจำนวนเงินและอัตราดอกเบี้ยแบบไม่คงที่

สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จะได้ดังสมการที่ (5)

$$S_{MRi}(n)=\sum_{j=1}^{n}R_{n-(j-1)}\left(1+\frac{i_{n-(j-1)}}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\prod_{a=1}^{j-1}\left(1+\frac{i_{n-(a-1)}}{m}\right)^{m} \tag{5}$$

พิสูจน์ จากตัวแบบมาตรฐาน จะได้มูลค่าเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 1 ดังนี้

$$S_{MRi}(1)=R_1\left(1+\frac{i_1}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$$
$$=R_{1-(1-1)}\left(1+\frac{i_{1-(1-1)}}{m}\right)^{\frac{m}{2}}$$
$$=R_{1-(1-1)}I_{1-(1-1)}^{m/2}$$

กำหนดให้ $k\in\mathbb{N}$ ซึ่งจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ k คือ

$$S_{MRi}(k)=\sum_{j=1}^{k}R_{k-(j-1)}I_{k-(j-1)}^{m/2}\prod_{a=1}^{j-1}I_{k-(a-1)}^{m}$$

เนื่องจากจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปี ปีที่ $k+1$ ได้จากผลรวมของเงินรวมกลางปี ปีที่ $k+1$ กับดอกเบี้ยครึ่งปีหลังของปีที่ $k+1$ และจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จึงได้ว่า

$$S_{MRi}(k+1)=\left(S_{MRi}(k)I_{k+1}^{m/2}+R_{k+1}\right)I_{k+1}^{m/2}$$
$$=\left(\left(\sum_{j=1}^{k}R_{k-(j-1)}I_{k-(j-1)}^{m/2}\prod_{a=1}^{j-1}I_{k-(a-1)}^{m}\right)I_{k+1}^{m/2}+R_{k+1}\right)I_{k+1}^{m/2}$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}R_{(k+1)-(j-1)}I_{(k+1)-(j-1)}^{m/2}\prod_{a=1}^{j-1}I_{(k+1)-(a-1)}^{m}$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}R_{(k+1)-(j-1)}\left(1+\frac{i_{(k+1)-(j-1)}}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\prod_{a=1}^{j-1}\left(1+\frac{i_{(k+1)-(a-1)}}{m}\right)^{m} \quad \square$$

3.2 ลักษณะกราฟของผลตอบแทนจากการออมเงินเมื่อครบสิ้นปี ที่คำนวณได้จากตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีเปรียบเทียบกับตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี

ผู้วิจัยได้แสดงลักษณะกราฟของผลตอบแทนจากการออมเงินเมื่อครบสิ้นปี ซึ่งคำนวณได้จากการกำหนดค่าเริ่มต้น

ของตัวแปรค่าเดียวกัน ลงในตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีทั้ง 4 ตัวแบบ รวมถึงตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี [6], [7] ได้กราฟแสดงว่าผลตอบแทนของการออมเงินต้นปีมากกว่าผลตอบแทนของการออมเงินกลางปี และผลตอบแทนของการออมเงินกลางปีมากกว่าผลการตอบแทนของการออมเงินปลายปี และมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้น ซึ่งเป็นผลมาจากการคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้น โดยในแต่ละปีจำนวนเงินออมจะเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ แกนนอนของกราฟแสดงระยะเวลา (ปี) และแกนตั้งแสดงผลตอบแทนของจำนวนเงินออมเมื่อครบสิ้นปี (บาท) ตัวอย่างดังรูปที่ 1–4

4. อภิปรายผลและสรุป

4.1 จากทฤษฎีบท 1–4 ทำให้ได้ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี ซึ่งประกอบด้วยตัวแปร คือ จำนวนเงินปัจจุบัน อัตราดอกเบี้ยต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้นต่อปี และจำนวนครั้งของการออมเงิน ที่มีการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบที่สร้างขึ้น โดยการพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4.2 ผู้ออมสามารถใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี คำนวณหาจำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีใดๆ จากการกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปร โดยผู้วิจัยได้ยกตัวอย่างจำนวนเงินออมและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบไม่คงที่ ดังตารางที่ 1 สำหรับจำนวนเงินออมและอัตราดอกเบี้ยต่อปีแบบคงที่ ใช้ตัวอย่างเงินออม 10,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี จะได้จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่คำนวณได้จากตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี แสดงดังตารางที่ 2 นอกจากนี้ผู้ออมสามารถคำนวณหาจำนวนเงินปัจจุบันที่ต้องการออม จากการกำหนดจำนวนเงินที่ต้องการเมื่อครบสิ้นปีใดๆ ได้เช่นกัน

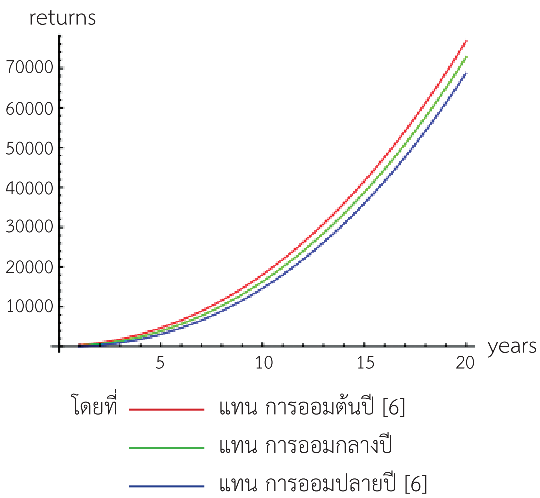
ตารางที่ 1 ตัวอย่างจำนวนเงินออม (บาท) และอัตราดอกเบี้ย (ร้อยละต่อปี) เป็นเวลา 30 ปี

ปีที่	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
เงินออม	10,000	12,000	15,000	20,000	17,000
อัตราดอกเบี้ย	2.0	2.5	2.25	2.75	3.0
ปีที่	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
เงินออม	12,000	9,000	11,000	16,000	10,000
อัตราดอกเบี้ย	2.8	2.4	2.2	2.35	2.55
ปีที่	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
เงินออม	15,000	17,000	18,000	15,000	19,000
อัตราดอกเบี้ย	2.1	2.4	2.15	1.75	1.55
ปีที่	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
เงินออม	14,000	7,000	5,000	9,000	12,000
อัตราดอกเบี้ย	2.0	2.75	3.25	3.0	2.75
ปีที่	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
เงินออม	8,000	4,000	12,000	7,500	9,200
อัตราดอกเบี้ย	2.5	2.0	2.25	2.75	3.0
ปีที่	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
เงินออม	11,200	12,000	14,000	4,500	5,000
อัตราดอกเบี้ย	2.5	2.25	2.25	2.5	2.75

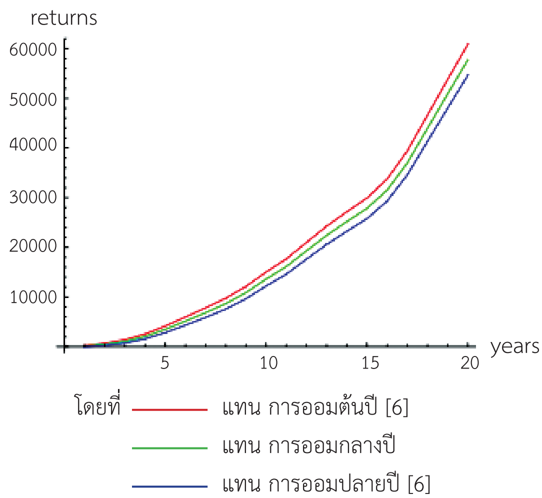
ตารางที่ 2 จำนวนเงินเมื่อครบสิ้นปีที่ 5, 10, 15, 20 และ 30 จากการคำนวณด้วยตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี

m	$S_{(x)}$ \ n	5	10	15	20	30
2 ครั้ง	$S_{(1)}$	52,571.32	110,642.76	174,789.75	245,647.95	410,379.93
	$S_{(2)}$	53,473.36	113,550.12	177,743.72	257,510.54	442,899.42
	$S_{(3)}$	77,343.65	146,354.87	249,861.11	325,466.41	493,779.83
	$S_{(4)}$	78,568.06	150,338.48	253,850.40	341,570.86	536,003.07
4 ครั้ง	$S_{(1)}$	52,577.93	110,671.05	174,857.88	245,777.62	410,714.95
	$S_{(2)}$	53,485.57	113,596.44	177,832.11	257,723.33	443,470.65
	$S_{(3)}$	77,352.22	146,393.00	249,954.03	325,643.75	494,217.48
	$S_{(4)}$	78,584.23	150,401.32	253,970.82	341,861.27	536,749.67
12 ครั้ง	$S_{(1)}$	52,582.36	110,690.02	174,903.56	245,864.60	410,939.73
	$S_{(2)}$	53,493.77	113,627.55	177,891.45	257,866.35	443,854.70
	$S_{(3)}$	77,357.97	146,418.56	250,016.34	325,762.70	494,511.12
	$S_{(4)}$	78,595.10	150,443.53	254,051.67	342,056.46	537,251.65
365 ครั้ง	$S_{(1)}$	52,584.51	110,699.22	174,925.73	245,906.81	411,048.84
	$S_{(2)}$	53,497.76	113,642.67	177,920.27	257,935.84	444,041.35
	$S_{(3)}$	77,360.76	146,430.96	250,046.58	325,820.43	494,653.66
	$S_{(4)}$	78,600.38	150,464.04	254,090.93	342,151.30	537,495.62

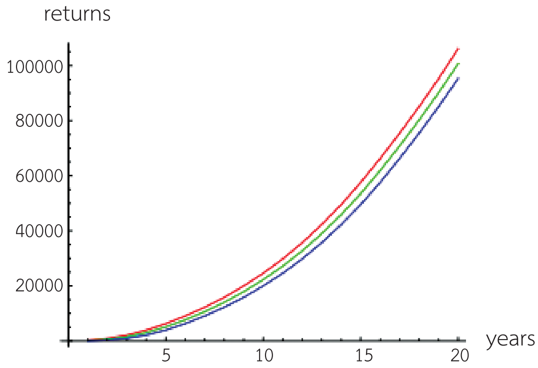
หมายเหตุ: $S_{(x)}$ แทน ตัวแบบคณิตศาสตร์ที่ได้จากทฤษฎีบท x เมื่อ $x = 1,2,3,4$



รูปที่ 1 ผลตอบแทนจากการออมเงินคงที่ ปีละ 10,000 บาท อัตราดอกเบี้ยคงที่ ร้อยละ 3 ต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้น 1 ครั้ง

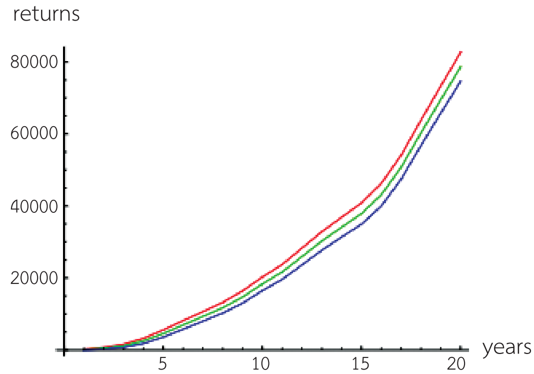


รูปที่ 2 ผลตอบแทนจากการออมเงินคงที่ ปีละ 10,000 บาท อัตราดอกเบี้ยไม่คงที่ในแต่ละปี (ใช้ข้อมูลดังตารางที่ 1) จำนวนครั้งของการทบต้น 4 ครั้ง



โดยที่ แทน การออมต้นปี [7]
แทน การออมกลางปี
แทน การออมปลายปี [7]

รูปที่ 3 ผลตอบแทนจากการออมเงินไม่คงที่ในแต่ละปี (ใช้ข้อมูลดังตารางที่ 1) อัตราดอกเบี้ยคงที่ ร้อยละ 3 ต่อปี จำนวนครั้งของการทบต้น 3 ครั้ง



โดยที่ แทน การออมต้นปี [7]
แทน การออมกลางปี
แทน การออมปลายปี [7]

รูปที่ 4 ผลตอบแทนจากการออมเงินไม่คงที่ในแต่ละปี อัตราดอกเบี้ยไม่คงที่ในแต่ละปี (ใช้ข้อมูลดังตารางที่ 1) จำนวนครั้งของการทบต้น 2 ครั้ง

4.3 จากรูปที่ 1–4 สรุปได้ว่า ผลตอบแทนของการออมเงินต้นปีมากกว่าผลตอบแทนของการออมเงินกลางปีและผลตอบแทนของการออมเงินกลางปีมากกว่าผลตอบแทนการออมเงินปลายปี จากการกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรค่าเดียวกันลงในตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี ตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการออมเงินต้นปีและปลายปี เนื่องจากจำนวนเงินที่ออมก่อนหน้าจะอยู่ในระยะเวลาการคิดดอกเบี้ยทบต้นที่นานกว่าจำนวนเงินที่ออมช่วงหลัง ทำให้ได้แนวคิดว่าหากผู้ออมมีความจำเป็นต้องสำรองเงินเพื่อใช้จ่ายในช่วงเทศกาลต่างๆ ตอนต้นปี ส่งผลให้ผู้ออมยังไม่ได้ทำการออมเงินได้ในช่วงนี้ก็สามารถเร่งเก็บเงินในช่วงเวลาที่เหลือไว้ออมตอนกลางปีเพื่อที่จะได้ผลตอบแทนที่มากกว่าจากการออมเงินปลายปี

4.4 ตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปี เป็นเครื่องมือหนึ่งที่ช่วยให้ผู้ออมใช้วางแผนทางการเงินเพื่ออนาคต และยังสามารถใช้ประกอบการตัดสินใจเลือกออมเงินกับสถาบันการเงินต่างๆ ตลอดจนใช้เปรียบเทียบผลตอบแทนจากการออมเงินประเภทอื่นๆ เช่น พันธบัตร การฝากประจำรายปีหรือการออมในรูปผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตเป็นการวางแผนการออมเงินเมื่อเกษียณอายุ หากวิเคราะห์ร่วมกับนราธิป [6], [7] จะทำให้การตัดสินใจมีความรอบคอบมากขึ้น และได้รับผลตอบแทนที่เหมาะสมกับผู้ออมแต่ละคน นอกจากนี้หากผู้ออมศึกษาความรู้เพิ่มเติมอย่างจริงจังจะสามารถประกอบอาชีพนักวางแผนทางการเงินได้

4.5 งานวิจัยเรื่องตัวแบบคณิตศาสตร์เชิงกำหนดเพื่อการออมเงินกลางปีเป็นงานวิจัยเชิงประยุกต์ ซึ่งมีการพิสูจน์ความถูกต้องของตัวแบบที่สร้างขึ้น โดยใช้หลักการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ซึ่งเป็นพื้นฐานที่จำเป็นต่อการได้ผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ ส่งผลให้ผู้อ่านตระหนักถึง ความจำเป็นของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ทำให้เกิดการศึกษาความรู้เพิ่มเติมเพื่อสร้างทฤษฎี องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ เพื่อเป็นรากฐานในการพิสูจน์ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ และนำไปสู่การใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริงต่อไป

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิเป็นอย่างสูงที่ให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ จนทำให้งานวิจัยเรื่องนี้มีความสมบูรณ์ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นที่สำคัญต่อการทำวิจัยครั้งต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] E. S. Schwartz, "The stochastic behavior of commodity price: Implications for valuation and hedging," *The Journal of Finance*, vol. 52, no. 3, pp. 1297–1338, 1997.

[2] N. Issaranusorn, S. Rujivan, and K. Mekchay, "Stochastic model for gold price and its application for no-arbitrage gold derivative pricing," *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization*, vol. 2, pp. 11–17, 2011.

[3] J. Hull, *Options, Futures, and other Derivatives*, 7 th ed, Peaerson Education Press, 2009.

[4] T. Nakabut, *Mathematical Modeling*. Nakhon Pathom Rajabhat University, 2003 (in Thai).

[5] X. Li and M. He, "The principal accumulation value of simple and compound interest," *Biotechnology an Indian Journal*, vol. 10, no. 18, pp. 10056–10061, 2014.

[6] N. Issaranusorn, "Future saving model by using mathematical technique," in *Proceedings of the 2th National and International Research Conference*, Thailand, 2015, pp. 426–435.

[7] N. Issaranusorn., "Saving mathematical model with inconstant present value and inconstant compound interest rate," in *Proceedings of International Congress on Banking, Economics, Finance and Business*, Japan, 2016, pp. 241–251.