



## บทความวิจัย

## การวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพานและรถไฟด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดี : กรณีศึกษาโครงการรถไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์

ชนศักดิ์ ศรีสวัสดิ์

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

รัฐภูมิ ปรีชาตปรีชา\* และ ทรงศักดิ์ สุทธาสุประดิษฐ์

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08 5121 1211 อีเมล: rattapoomh@gmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2022.05.001

รับเมื่อ 21 มกราคม 2564 แก้ไขเมื่อ 1 กุมภาพันธ์ 2564 ตอรับเมื่อ 11 มีนาคม 2564 เผยแพร่ออนไลน์ 3 พฤษภาคม 2565

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ผลตอบสนองแบบปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพานด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดี (Multibody Co-simulation Method) โดยใช้ตัวอย่างสะพานและรถไฟจากโครงการรถไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์ ในการสร้างแบบจำลอง นอกจากนี้ในการวิจัยยังได้ทำการทดสอบจริงโดยติดตั้งอุปกรณ์บนสะพานเพื่อตรวจวัดการสั่นสะเทือนเมื่อรถไฟแล่นผ่าน ผลที่ได้จากการทดสอบจะถูกนำมาใช้ในการเปรียบเทียบกับผลจากการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จากผลการดำเนินการพบว่า รูปแบบของการสั่นสะเทือนและค่าการแอ่นตัวของสะพานที่ได้จากการตรวจวัดมีความสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองมัลติบอดี อย่างไรก็ตามพบว่า ค่าความเร่งที่เกิดขึ้นบนสะพานนั้นมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ โดยอาจเป็นผลมาจากปัจจัยอื่นๆ เช่น ความไม่สม่ำเสมอของผิวทาง (Track Irregularity) รวมไปถึงความสมบูรณ์ของส่วนประกอบต่างๆ ของทางวิ่ง ผลจากการวิจัยแสดงให้เห็นถึงแนวทางการประยุกต์ใช้แบบจำลองระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดี ที่สามารถนำไปใช้ในการคาดคะเนผลตอบสนองจากพฤติกรรมปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและโครงสร้างสะพานได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์พฤติกรรมของระบบในสถานะอื่นๆ ได้ เช่น การเปลี่ยนระดับความเร็วของรถไฟ การเปลี่ยนแปลงรูปแบบของสะพาน ความไม่สม่ำเสมอของผิวทางในรูปแบบต่างๆ

**คำสำคัญ:** พฤติกรรมการวิ่งของรถไฟ วิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพาน ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบจำลองมัลติบอดี

การอ้างอิงบทความ: ชนศักดิ์ ศรีสวัสดิ์, รัฐภูมิ ปรีชาตปรีชา และ ทรงศักดิ์ สุทธาสุประดิษฐ์, “การวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพานและรถไฟด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดี : กรณีศึกษาโครงการรถไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์,” วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, ปีที่ 33, ฉบับที่ 1, หน้า 69–80, ม.ค.-มี.ค. 2566.



## Analysis of Train-bridge Dynamic Interaction By Using Finite Element Method and Multibody Co-simulation Model: Case Study of Thailand Airport Rail Link Project

Thanasak Srisawat

Department of Civil Engineering Faculty of Engineering, Naresuan University, Phitsanulok, Thailand

Rattapoohm Parichatprecha\* and Songsak Suthasupradit

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology, Ladkrabang, Bangkok, Thailand

\* Corresponding Author, Tel. 08 5121 1211, E-mail: rattapoohm@gmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2022.05.001

Received 21 January 2021; Revised 1 February 2021; Accepted 11 March 2021; Published online: 3 May 2022

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### Abstract

This research aims to analyze the interaction response between trains and bridges by using Finite Element Method (FEM) and Multibody Co-simulation model. The bridges and trains details were obtained from Thailand Airport Rail Link Project. In addition, actual tests were carried out by installing devices on the bridge to measure the vibration as the train passed. The tested results were used for comparison with the results from the mathematical models developed. It was founded that, the results of vibration mode and mid-span deflection from field experiment and numerical simulation are in good agreement. However, the significant differences of the bridge acceleration were found in some range of train speed. Those differences between bridge acceleration results may be caused by the effects of track irregularity and the condition of track components. This research has been shown that the finite element model with multi-body model can be applied for prediction of the behaviors of train-bridge dynamic interaction, effectively. Furthermore, this technique can also be applied to analyze the behaviors of the system in other conditions, such as variation of the train speed, bridge configuration as well as degree of track Irregularity, etc.

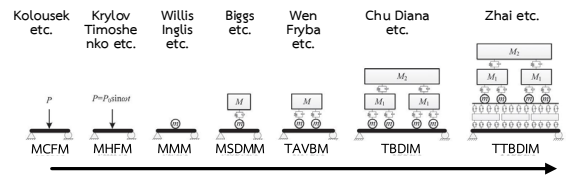
**Keywords:** Running Behavior, Train-bridge Interaction, Finite Element Method, Multibody Simulation Method

Please cite this article as: T. Srisawat, R. Parichatprecha, and S. Suthasupradit, "Analysis of train-bridge dynamic interaction by using finite element method and multibody co-simulation model: Case study of Thailand airport rail link project," *The Journal of KMUTNB*, vol. 33, no. 1, pp. 69–80, Jan.–Mar. 2023 (in Thai).

## 1. บทนำ

โครงสร้างสะพานรถไฟจะเกิดการสั่นสะเทือนเมื่อมีรถไฟแล่นผ่าน เนื่องจากแรงกระทำจากล้อรถไฟรวมทั้งการตอบสนองทางพลศาสตร์ของตัวสะพานเอง โดยพฤติกรรมดังกล่าวยังมีผลกระทบบวกกลับไปสู่ตัวรถไฟ ซึ่งอาจส่งผลกระทบต่อความปลอดภัยและประสิทธิภาพในการเดินทาง ในปัจจุบันมีการประยุกต์ใช้เทคนิควิธีหลายชนิดในการวิเคราะห์ เช่น การวิเคราะห์แบบ The Moving Constant Force Model (MCFM) ซึ่งเป็นรูปแบบการวิเคราะห์ที่ไม่ซับซ้อนและใช้กันอย่างแพร่หลาย อย่างไรก็ตาม วิธีดังกล่าวยังมีข้อจำกัดในหลายๆ ด้านที่ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้นั้นไม่สอดคล้องกับสถานการณ์ใช้งานจริง จึงได้มีการพัฒนาแบบจำลองระบบตัวรถไฟเพื่อตอบสนองต่อผลกระทบของการเพิ่มความเร่งจากการเพิ่มสปริง (Spring) และตัวสลายพลังงาน (Damper) ของตัวรถไฟ ต่อมาจึงมีการพัฒนาแบบจำลองชนิด The Moving Spring-Damping-Mass Model (MSDMM) โดยมีการจำลองสปริง และตัวสลายพลังงานเพียงชุดเดียวเพื่อมาแทนทั้งระบบ และได้พัฒนาระบบการวิเคราะห์ช่วงล่างโดยจำลองแคร่ (Bogie) และตู้รถไฟ (Car Body) ตามลำดับ ต่อมาเมื่อมีการพัฒนาแบบจำลองให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นจึงได้เพิ่มระบบของทางรถไฟลงในแบบจำลอง เช่น ราง (Rail) เครื่องยึดเหนี่ยวราง (Rail Fastener) หมอนรองราง (Sleeper) และแผ่นรองราง (Rail Pad) โดยเป็นแบบจำลองชนิด Train-Track-Bridge Dynamic Interaction Model (TTBDIM) [1] วรรณนาการของการพัฒนาแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์หาปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพานดังแสดงในรูปที่ 1

จากงานวิจัยของ Schneider และ Marx [7] พบว่าปัจจัยที่มีผลต่อการสั่นสะเทือนที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของสะพานคือ 1) ค่าความแข็งเกร็ง (Stiffness) เมื่อเพิ่มความแข็งเกร็งของสะพานจะทำให้ความเร่งของสะพานเท่าเดิม แต่ความเร็วของรถไฟที่ทำให้เกิดการสั่นพ้องจะสูงขึ้นตามค่าความแข็งเกร็งที่เพิ่มขึ้น 2) มวล (Mass) เมื่อเพิ่มมวลของสะพานจะทำให้ความเร่งของสะพานต่ำลง แต่ในขณะเดียวกันก็จะเกิดการสั่นพ้องที่ความเร็วต่ำลงเช่นกัน และ 3) ตัวสลายพลังงาน เมื่อเพิ่มค่าสลายพลังงานของสะพานจะทำให้



รูปที่ 1 วรรณนาการของแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์หาปฏิสัมพันธ์ทางพลศาสตร์ระหว่างรถไฟและสะพาน [1]–[6]

ความเร่งของสะพานลดลง ในขณะที่ความเร็วของการสั่นพ้องมีค่าเท่าเดิม

ในด้านของตัวรถไฟ ปัจจัยหลักของคุณลักษณะที่มีผลกระทบต่อ การสั่นสะเทือนของสะพานคือ ความเร็ว (Speed) ระยะระหว่างล้อ (Wheel Base) น้ำหนักลงเพลลา (Axle Load) และชุดช่วงล่าง (Bogie)

ปัจจุบันได้มีการพัฒนาวิธีการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพาน (Train-Bridge Interaction) มาใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งในด้านงานวิเคราะห์การตอบสนองของสะพานเหล็กรถไฟ [5], [8] ช่วยแก้ปัญหาช่วงเปลี่ยนผ่าน (Transition Zones) ระหว่างทางรถไฟแบบหินโรยทางกับสะพาน [9]–[11] สามารถวิเคราะห์ผลกระทบจากปัจจัยภายนอกได้ เช่น แรงแลม [12] และผลกระทบจากการสั่นของโครงสร้างรถไฟสู่พื้นดินและผลกระทบต่อโครงสร้างอาคารรอบข้าง [13], [14] รวมถึงใช้เป็นการวิเคราะห์การแตกร้าวของพื้นทางรถไฟแบบแผ่นพื้นคอนกรีต (Slab Track) [15]

เนื่องจากขณะรถไฟวิ่งผ่านสะพานจะเกิดการส่งผ่านแรงจากรถไฟสู่สะพานและสะพานสู่รถไฟ เป็นการกระทำแบบกลับไปกลับมา จากพฤติกรรมดังกล่าวส่งผลให้ในการวิเคราะห์มีความซับซ้อนสูง ในงานวิจัยนี้จะแบ่งแบบจำลองเป็น 2 ส่วน และเชื่อมโยงหรือสร้างปฏิสัมพันธ์ผ่านพฤติกรรมของแรงกระทำระหว่างล้อและราง โดยแบบจำลองที่กล่าวมาคือ แบบจำลองตัวรถไฟจะใช้วิธีจำลองพฤติกรรมผ่านแบบจำลองมัลติบอดี้ (Multibody Simulation) [3], [4], [12], [16] ในขณะที่แบบจำลองสะพานจะใช้วิธีจำลองพฤติกรรมผ่านวิธีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) [3]–[5], [17], [18]

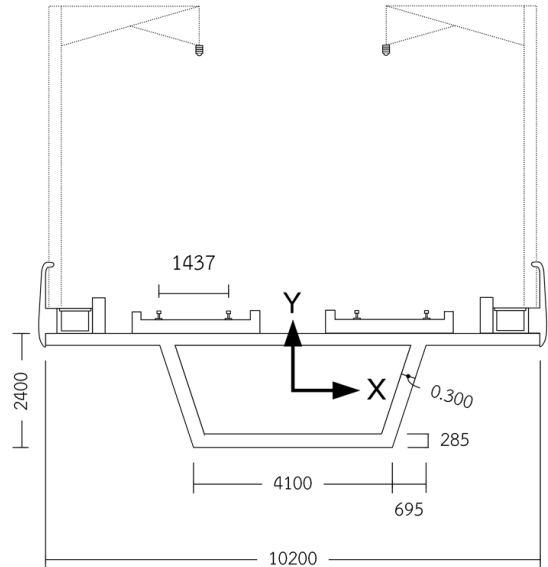
อย่างไรก็ตาม งานวิจัยที่ทำการศึกษาระบบจำลองและทดสอบผลตอบสนองแบบปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟ และ สะพานในประเทศไทยยังมีอยู่น้อยมาก ดังนั้นในการศึกษานี้ จึงมีเป้าหมายหลักเพื่อพัฒนากระบวนการวิเคราะห์แบบ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพาน โดยใช้ตัวอย่างในการ วิเคราะห์และทดสอบเป็นสะพานและรถไฟที่ใช้ในโครงการ รถไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์ และใช้โปรแกรม Universal Mechanism [19] เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์พฤติกรรม แบบปฏิสัมพันธ์ ทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากแบบจำลอง ที่พัฒนาขึ้นกับผลการทดสอบจริงทั้งแบบสถิตย์และแบบ พลวัต ทั้งนี้รายละเอียดการสร้างและพัฒนาแบบจำลอง การทดสอบและอุปกรณ์การทดสอบ ตลอดจนการวิเคราะห์ และเปรียบเทียบผลได้ถูกนำเสนอไว้อย่างครบถ้วนแล้วใน บทความนี้โดยวัตถุประสงค์และขอบเขต ดังนี้ 1) เพื่อพัฒนา กระบวนการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพานและรถไฟ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติ บอดี้ 2) เปรียบเทียบความแม่นยำของกระบวนการวิเคราะห์ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพาน และรถไฟด้วยระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดี้กับการทดสอบ ภาคสนาม และ 3) ประยุกต์ใช้กระบวนการวิเคราะห์ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพาน และรถไฟในการตรวจประเมิน คุณภาพของสะพานรถไฟ กรณีศึกษาโครงการรถไฟฟ้า แอร์พอร์ต เรล ลิงก์ ภายใต้รถไฟไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์ ชนิด Express Line ช่วงความเร็ว 20-180 กม./ชม. โดย ตรวจสอบการโก่งตัวของสะพานรถไฟโครงการรถไฟฟ้า แอร์พอร์ต เรล ลิงก์ ความยาว 35.5 ม. จำนวน 2 ตัว ตามมาตรฐาน UIC 776-2R [20] และตรวจสอบความเร่ง ของสะพานรถไฟโครงการรถไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์ ความยาว 35.5 ม. จำนวน 2 ตัว ตามมาตรฐาน UIC 776-2R [20]

## 2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

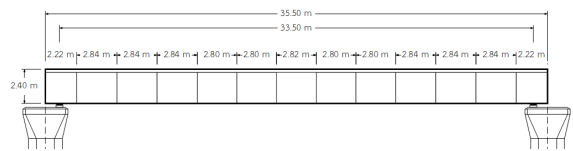
### 2.1 การพัฒนาแบบจำลองสะพานและรถไฟ

#### 2.1.1 ระบบโครงสร้างสะพานรถไฟ

แบบจำลองสะพานรถไฟเป็นสะพานแบบกล่อง (Box



รูปที่ 2 ขนาดหน้าตัดสะพาน

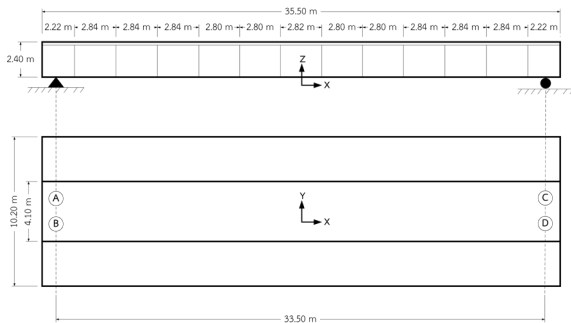


รูปที่ 3 รูปแบบการติดตั้งของตัวสะพานกับตอม่อ

Girder) แบบคานช่วงเดียว (Simple Beam) ที่มีขนาด 35.5 ม. เนื่องจากสะพานรูปแบบดังกล่าวมีการติดตั้ง และใช้งาน เป็นส่วนมากตลอดทั้งโครงการรถไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์ โดยมีมิติด้านหน้าและด้านข้าง (ดังแสดงรูปที่ 2 และรูปที่ 3 ตามลำดับ) จากข้อมูลดังกล่าวพบว่า มีขนาดหน้าตัด (Area) เท่ากับ 4.86 ตร.ม. โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia) รอบแกน  $x (I_x)$  และ  $y (I_y)$  เท่ากับ 3.89 และ 30.99  $m^4$  ตามลำดับ มีน้ำหนักโดยรวมอุปกรณ์ติดตั้งส่วนบนทั้งหมด 691.87 ตัน ระบบของโครงสร้างสะพานจะถูกจำลองโดยใช้วิธี ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้ชิ้นส่วนชนิด Shell Element และปรับแก้แบบจำลองให้มีคุณสมบัติเบื้องต้นโดย รูปที่ 4 แสดงตัวอย่างแบบจำลองสะพานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ส่วนตำแหน่งรองรับจะจำลองตามพฤติกรรมการติดตั้งของ สะพานจะมีทั้งหมด 4 จุด ดังตารางที่ 1 และรูปที่ 5



รูปที่ 4 ตัวอย่างรูปร่างของแบบจำลองสะพานแบบระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)



รูปที่ 5 อธิบายตำแหน่งจุดรองรับบนสะพานทั้ง 2 สะพาน

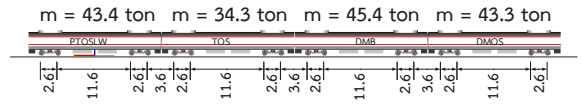
ตารางที่ 1 อธิบายพฤติกรรมของจุดรองรับทั้ง 4 จุด บนสะพานรถไฟ

ตำแหน่งจุดรองรับ	การเคลื่อนที่ตามแกน		
	X	Y	Z
A	0	1	0
B	0	0	0
C	1	1	0
D	1	0	0

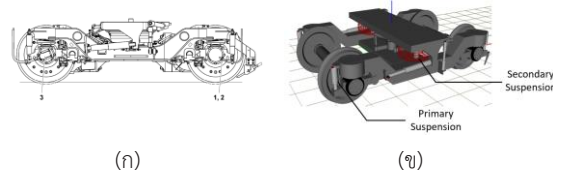
หมายเหตุ: 0 = ไม่สามารถการเคลื่อนที่ได้ 1 = สามารถเคลื่อนที่ได้

### 2.1.2 ระบบตัวรถไฟ

การพัฒนาแบบจำลองรถไฟจะใช้รถไฟฟ้ายูเอชแอล เอ็กซ์เพรสไลน์ เป็นต้นแบบการจำลอง รถไฟยูเอชแอล เอ็กซ์เพรสไลน์ทั้งหมด 4 ตู้ 8 แคร่ แต่ละตู้มีน้ำหนักอยู่ประมาณ 40 ตัน ดังรูปที่ 6 จะมีระยะห่างของล้อใน 1 แคร่เท่ากับ 2.6 ม. ระยะห่างระหว่างกึ่งกลางแคร่ถึงกึ่งกลาง



รูปที่ 6 ระยะห่างระหว่างเพลาลงและน้ำหนักของแต่ละตู้ของรถไฟยูเอชแอล เอ็กซ์เพรสไลน์



รูปที่ 7 (ก) แบบแคร่จากแบบรถฟ้ายูเอชแอล เอ็กซ์เพรสไลน์ (ข) แบบจำลองรถไฟฟ้ายูเอชแอล เอ็กซ์เพรสไลน์

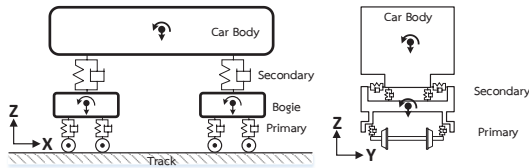
แคร่ใน 1 ตู้โดยสาร เท่ากับ 14.2 ม. และระยะห่างระหว่างตู้โดยสาร 2 ตู้ เมื่อเทียบกึ่งกลางแคร่ท้ายของตู้โดยสารแรกถึงกึ่งกลางแคร่แรกของตู้โดยสารที่สองเท่ากับ 6.2 ม.

แคร่ของรถไฟของโครงการรถไฟฟ้ายูเอชแอล เอ็กซ์เพรสไลน์ มีลักษณะคือมีชุดสลายพลังงานหลัก 2 ชุด คือ ชุดแรกอยู่ระหว่างล้อถึงแคร่ (Primary Suspension) ที่ประกอบด้วยสปริง และชุดสลายพลังงานส่วนชุดที่สองอยู่ระหว่างตัวแคร่ถึงตัวรถไฟ (Secondary Suspension) ใช้แบบถุงลม (Air Spring) ดังรูปที่ 7

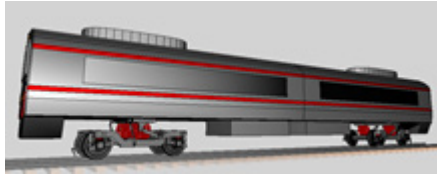
การจำลองพฤติกรรมของตัวรถไฟจะใช้แบบจำลองมัลติบอดี้ (Multibody Simulation Method) โดยตัวรถไฟแคร่ และล้อจะมีการเคลื่อนที่อิสระทุกทิศทาง (6 Degrees of Freedom) ระหว่างตัวรถไฟกับแคร่จะเชื่อมต่อโดยชุดสลายพลังงานที่จำลองเป็นสปริง และแดมเปอร์รับแรงสองแกนคือแนวตั้ง (แกน Z) และด้านข้าง (แกน Y) ส่วนระหว่างแคร่กับชุดล้อจะเชื่อมต่อโดยชุดสลายพลังงานที่จำลองเป็นสปริงและแดมเปอร์รับแรงหนึ่งแกนคือแนวตั้ง (แกน Z) โดยมีแผนผังแบบจำลองดังรูปที่ 8 และรูปที่ 9 แสดงตัวอย่างรูปร่างของแบบจำลองรถไฟด้วยแบบจำลองรถไฟแบบมัลติบอดี้

### 2.1.3 ปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพาน (Train-Bridge Interaction)

ขณะที่รถไฟแล่นผ่านสะพานจะมีการสั่นสะเทือนเกิดขึ้น



รูปที่ 8 ลักษณะแบบจำลองระบบทางพลศาสตร์ของรถไฟ [8]



รูปที่ 9 ตัวอย่างรูปร่างของแบบจำลองรถไฟด้วยแบบจำลองรถไฟแบบมัลติบอดี

ต่อทั้งตัวรถไฟเองรวมทั้งสะพาน โดยมีทั้งสองระบบจะมีการเชื่อมต่อกันผ่านจุดสัมผัสระหว่างล้อและราง (Wheel-rail Contact Points) พฤติกรรมการสั่นสะเทือนของทั้งสองระบบจะส่งผลซึ่งกันและกัน (Interaction) จากการส่งผ่านแรงกระทำระหว่างล้อและราง โดยการจำลองพฤติกรรมปฏิสัมพันธ์ของรถไฟและสะพานจะมีการสร้างสมการการเคลื่อนที่ดังสมการที่ (1) [5]

$$\begin{bmatrix} M_t & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_t \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_t & C_{tb} \\ C_{bt} & C_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_t \\ \dot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t & K_{tb} \\ K_{bt} & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_t \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$M$  คือ เมทริกซ์มวลของระบบ (Mass Matrix)

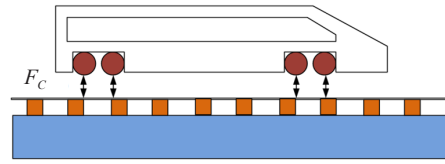
$C$  คือ เมทริกซ์แดมเปอร์ของระบบ (Damper Matrix)

$K$  คือ เมทริกซ์สติฟเนสของระบบ (Stiffness Matrix)

$F$  คือ เวกเตอร์ของแรงต่างๆ ที่กระทำต่อระบบ

$t$ ,  $b$  และ  $tb$  หมายถึง เทอมที่เกี่ยวข้องกับรถไฟ สะพาน และปฏิสัมพันธ์ระหว่างทั้งสองระบบ ตามลำดับ

อย่างไรก็ตาม การนำสมการการเคลื่อนที่ดังกล่าวไปใช้วิเคราะห์ยังมีความยุ่งยาก เนื่องจากเมื่อรถไฟมีการเคลื่อนไปบนตำแหน่งต่างๆ ของสะพานนั้น จะทำให้ค่าเมทริกซ์ในเทอมที่เกี่ยวข้องกันของสองระบบ ( $tb$ ) มีการเปลี่ยนแปลงไปอยู่ตลอดเวลา



รูปที่ 10 ปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพาน

ดังนั้นเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวจึงทำการแยกระบบออกจากกัน (Decoupling) โดยทำการเปลี่ยนเทอม  $tb$  ให้อยู่ในรูปของแรงกระทำระหว่างล้อและราง (Wheel-rail Contact Force,  $F_c$ ) ดังรูปที่ 10 ซึ่งจะทำให้สามารถแยกสมการของระบบรถไฟและสะพานออกเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยมีตัวแปรที่ใช้ร่วมกันคือ เวกเตอร์  $F_c$  ดังสมการที่ (2) และ (3)

$$M_t \ddot{u}_t + C_t \dot{u}_t + K_t u_t = F_t + F_c \quad (2)$$

$$M_b \ddot{u}_b + C_b \dot{u}_b + K_b u_b = F_b - F_c \quad (3)$$

การคำนวณค่าแรงกระทำระหว่างล้อและราง ( $F_c$ ) ได้ใช้เทคนิควิธี FASTSIM ของ Kalker [21] ที่มีการคำนึงถึงแรงกดในแนวตั้งแนวด้านข้าง รวมทั้งการคืบ (Creepage) ที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัสของล้อและรางขณะรถไฟกำลังเคลื่อนที่ด้วยเช่นกัน

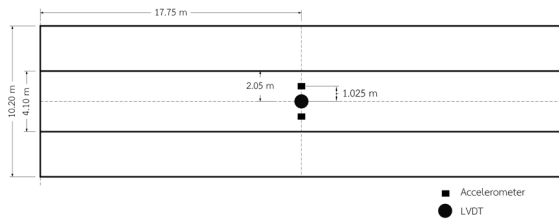
## 2.2 การทดสอบภาคสนาม

เนื่องจากการทดสอบครั้งนี้จะเลือกทดสอบสะพานรถไฟทั้งหมด 2 ตัว เพื่อเปรียบเทียบผลการทดสอบทางภาคสนาม ซึ่งเป็นสะพานแบบกล่องขนาด 35.5 ม. โดยมีรายละเอียดการทดสอบดังนี้

### 2.2.1 การติดตั้งเครื่องตรวจวัด (Instrument Installation)

#### 2.2.1.1 การติดตั้งบนสะพาน

ในการติดตั้งเครื่องตรวจวัด (Sensors) จะติดตั้งทั้งหมด 2 ชนิด คือ เครื่องวัดความเร่ง (Accelerometer) 3 แกน จำนวน 1 ตำแหน่ง จะติดตั้งบริเวณตรงกลางสะพานและเครื่องตรวจวัดการแอ่นตัวของสะพาน (Linear Variable Differential Transformer) จำนวน 2 ตำแหน่ง จะติดตั้งบริเวณกึ่งกลางสะพานแต่เอียงไปทางขวาและซ้าย ข้างละ



รูปที่ 11 การติดตั้งเครื่องมือตรวจวัดบนสะพาน



(ก)



(ข)

รูปที่ 12 (ก) เครื่องวัดความเร่ง 3 แกน (ข) เครื่อง LVDT

1.025 ม. ดังรูปที่ 11 และรูปที่ 12

#### 2.2.1.2 การติดตั้งอุปกรณ์ตรวจวัดบนรถไฟ

ในการติดตั้งเครื่องตรวจวัดจะติดตั้งเครื่องวัดความเร่ง 3 แกน ทั้งหมด 2 ตำแหน่ง โดยจะติดตั้งบนพื้นรถบริเวณกึ่งกลางแคร่รถไฟดังรูปที่ 13

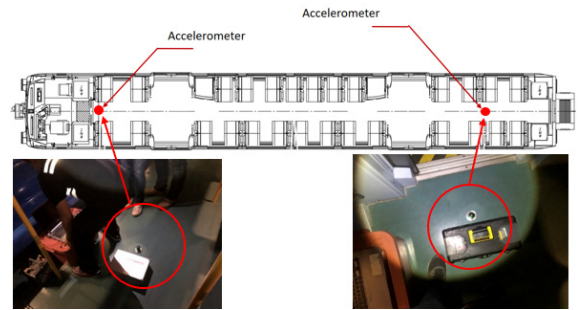
#### 2.2.2 ขั้นตอนการทดสอบ

การทดสอบจะแบ่งเป็นการทดสอบ 2 แบบ (รูปที่ 14) คือ การทดสอบแบบกึ่งสถิตย์ (Quasi-static) จะทดสอบโดยใช้รถไฟ 2 ขบวน เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 5 กม./ชม. ส่วนกันบริเวณกึ่งกลางสะพาน และการทดสอบแบบพลวัต (Dynamic) จะใช้รถไฟเพียง 1 ขบวน เนื่องจากด้านความปลอดภัยและการควบคุมให้รถไฟสวนกันบริเวณกึ่งกลางสะพานในความเร็วสูงเป็นการยาก ในการทดสอบแบบพลวัตจะใช้ความเร็ว 5, 60, 100 และ 125 กม./ชม. ในการทดสอบ

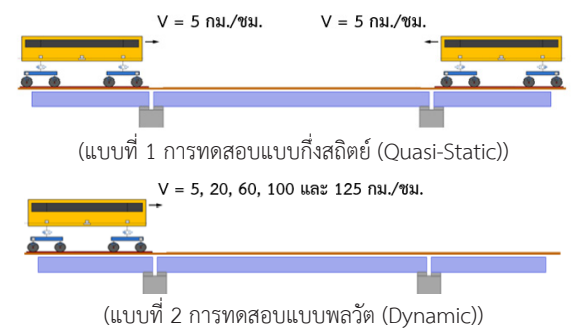
### 2.3 การสอบเทียบแบบจำลองและการทดสอบ

#### 2.3.1 ระบบสะพาน (Bridge)

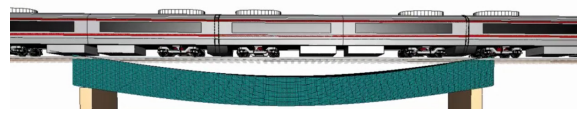
ผลที่ได้จากการเก็บข้อมูลภาคสนามของค่าความเร่งและการโก่ง ถูกลนำมาวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของของ



รูปที่ 13 ตำแหน่งติดตั้งเครื่องวัดความเร่ง 3 แกนบนรถไฟ



รูปที่ 14 รูปแบบการทดสอบสะพาน



รูปที่ 15 ขณะการวิเคราะห์แบบจำลองสะพานรถไฟตอนรถไฟกำลังวิ่งผ่าน

โหมดที่ 1 (Bending Mode) ทั้งสะพานตัวที่ 1 และ 2 พบว่ามีค่าประมาณ 4.76 เฮิรตซ์ และ 4.67 เฮิรตซ์ ตามลำดับ เมื่อเทียบกับแบบจำลองที่ผ่านการพัฒนาความถูกต้องโดยการปรับปรุงคุณสมบัติเชิงกลของคอนกรีตได้ 4.70 เฮิรตซ์ มีร้อยละความแตกต่าง (%) เท่ากับ 1.26 และ 0.64 ตามลำดับ

ส่วนค่าการโก่งตัวของสะพานทั้งสองที่ได้จากการทดสอบแบบสถิตย์ (Static) แบบ 1 ขบวน วิ่งด้วยความเร็ว 5 กม./ชม. มีค่าเท่ากับ 1.84 และ 1.68 มม. ตามลำดับ เมื่อเทียบกับแบบจำลองได้ 1.77 มม. มีร้อยละความแตกต่าง (%) เท่ากับ 3.8 และ 5.36 ตามลำดับ โดยมีการเลือกรูปดังรูปที่ 15

### 2.3.2 ระบบรถไฟ (Train)

ผลที่ได้จากการเก็บข้อมูลความเร็วและการเคลื่อนที่นำ มาวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนโหมดหลักของรถไฟ ซึ่งพบว่า มีค่าประมาณ 1.36 เฮิรตซ์ ส่วนของแบบจำลองได้ 1.64 เฮิรตซ์ ซึ่งถือเป็นค่าที่สามารถยอมรับได้ ในการนำไปประยุกต์ใช้งาน [22], [23]

## 3. ผลการทดลอง

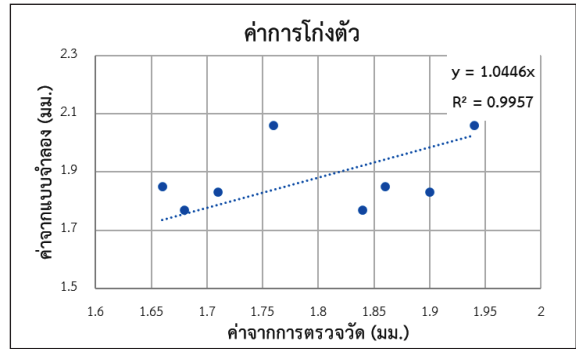
### 3.1 การเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับการทดสอบ

ผลของการเปรียบเทียบระหว่างการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ ระหว่างรถไฟและสะพานกับผลทดสอบภาคสนามของ ค่าการโก่งตัวกึ่งกลางสะพานพบว่า ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ มีค่าใกล้เคียงกับผลทดสอบภาคสนาม โดยมีร้อยละความแตกต่างอยู่ในช่วง 0.54–14.81 ดังตารางที่ 2 และเมื่อ ตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์การพยากรณ์ ( $R^2$ ) เท่ากับ 0.9957 ตามรูปที่ 16

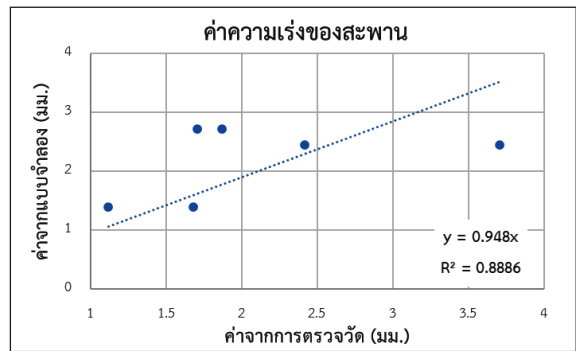
ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ ทางพลศาสตร์ระหว่างรถไฟและสะพานกับการ ตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์การพยากรณ์ ( $R^2$ ) เท่ากับ 0.9957 ตามรูปที่ 16

ลำดับ สะพาน	ความเร็ว (กม./ชม.)	ผลจาก ตรวจวัด (มม.)	ผลจากแบบ จำลอง (มม.)	ร้อยละความ แตกต่าง (%)
สะพานที่ 1	5	1.84	1.77	3.8
	60	1.86	1.85	0.54
	100	1.9	1.83	3.75
	125	1.94	2.06	6.09
สะพานที่ 2	5	1.68	1.77	5.36
	60	1.66	1.85	9.94
	100	1.71	1.83	6.7
	125	1.76	2.06	14.81

ผลของการเปรียบเทียบระหว่างการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ ระหว่างรถไฟและสะพานกับผลทดสอบภาคสนามของค่าการ ความเร็วของกึ่งกลางสะพานพบว่า ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ มีความแปรปรวนค่อนข้างสูง โดยมีร้อยละความแตกต่าง



รูปที่ 16 ค่าสัมประสิทธิ์การพยากรณ์ ( $R^2$ ) จากผลการโก่งตัวกลางสะพาน



รูปที่ 17 ค่าสัมประสิทธิ์การพยากรณ์ ( $R^2$ ) จากผลการ ความเร่งตัวกลางสะพาน

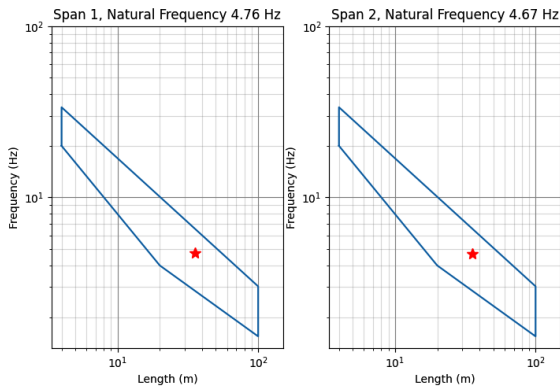
อยู่ในช่วง 0.79–52.36 ดังตารางที่ 3 ทั้งนี้เนื่องมาจาก ในแบบจำลองไม่กำหนดค่าความขรุขระของรางและความ ไม่ปกติของทางวิ่งของสภาพทางจริง และเมื่อตรวจสอบ ค่าสัมประสิทธิ์การพยากรณ์ ( $R^2$ ) เท่ากับ 0.8886 ตาม รูปที่ 17

### 3.2 การตรวจประเมินคุณภาพของสะพานรถไฟ

#### 3.2.1 ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency)

ผลของความถี่ธรรมชาติของสะพานที่ได้จากการ ทดสอบพบว่า ความถี่ธรรมชาติของสะพานยาว 35.5 ม. มีค่าความถี่ธรรมชาติโหมด 1 ประมาณ 4.76 เฮิรตซ์ และ 4.67 เฮิรตซ์ สะพานที่ 1 และ 2 ตามลำดับ โดยผลของการตรวจสอบตามมาตรฐาน UIC 776-2R





(สะพานที่ 1)

(สะพานที่ 2)

รูปที่ 18 ค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อเทียบกับมาตรฐาน UIC 776-2R

ตารางที่ 3 ผลการเปรียบเทียบการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ทางพลศาสตร์ระหว่างรถไฟและสะพานกับการตรวจวัดจริงของค่าการความเร่งสูงสุดของสะพาน

ลำดับสะพาน	ความเร็ว (กม./ชม.)	ผลจากตรวจวัด (ม./วินาที <sup>2</sup> )	ผลจากแบบจำลอง (ม./วินาที <sup>2</sup> )	ร้อยละความแตกต่าง (%)
สะพานที่ 1	60	1.12	1.39	19.61
	100	1.87	2.71	31.25
	125	2.42	2.44	0.79
สะพานที่ 2	60	1.68	1.39	20.98
	100	1.71	2.71	37.07
	125	3.71	2.44	52.36

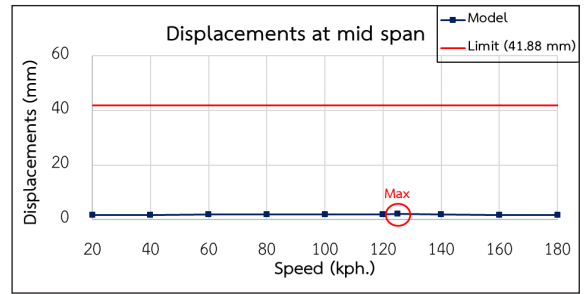
พบว่า สะพานทั้ง 2 ตัว ยังอยู่ในช่วงมาตรฐานที่กำหนดดังรูปที่ 18

3.2.2 ค่าการแอ่นตัวของสะพาน (Mid-Span Vertical Deflection)

ค่าการโก่งตัวของสะพานจะแสดงถึงความแข็งแรงของสะพานทางมาตรฐาน UIC 776-2R ได้กำหนดค่าการโก่งตัวสูงสุดเท่ากับ [สมการที่ (4)]

$$Max Displacement \leq L/800 \text{ (41.88 มม.)} \quad (4)$$

L = ความยาวของสะพานระหว่างจุดรองรับ



รูปที่ 19 ค่าการโก่งตัวกลางสะพานต่อความเร็ว

จากตารางที่ 4 ค่าแอ่นตัวสูงสุดตามมาตรฐาน UIC 776-2R ของสะพานความยาว 35.5 ม. (ความยาวของสะพานระหว่างจุดรองรับเท่ากับ 33.5 ม.) มีค่าเท่ากับ 41.88 มม. และผลจากการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพานและรถไฟพบว่า ค่าการโก่งตัวของสะพานมีค่าสูงสุดเท่ากับ 2.06 มม. ที่ความเร็ว 125 กม./ชม. ยังเหลือช่วงความปลอดภัยเมื่อเทียบกับมาตรฐานร้อยละ 95.08 ดังรูปที่ 19

ตารางที่ 4 ผลการวิเคราะห์การโก่งตัวของสะพานและค่าร้อยละคงเหลือเทียบกับมาตรฐาน UIC 776-2R

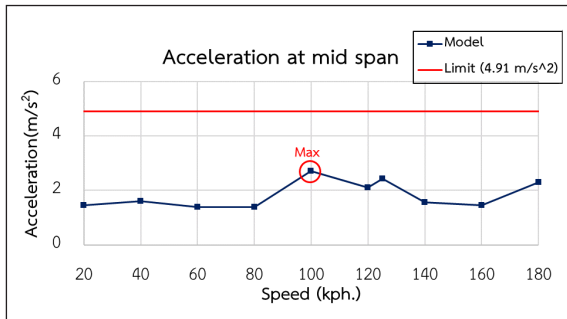
รายการ	ค่า
ค่าโก่งตัวสูงสุดที่มาตรฐาน UIC 776-2R กำหนด (มม.)	41.88
ค่าโก่งตัวจากการวิเคราะห์สูงสุด (มม.) (125 กม./ชม.)	2.06
ร้อยละความปลอดภัยคงเหลือ	95.08

3.2.3 ค่าความเร่งกลางสะพาน (Mid-span Vertical Acceleration)

ความเร่งของสะพานจะส่งผลกระทบต่อความปลอดภัยทั้งตัวสะพานและตัวรถไฟ โดยมาตรฐาน UIC 776-2R ได้กำหนดค่าการความเร่งสูงสุดดังนี้ [สมการที่ (5)]

$$Max Acceleration \leq 0.5g \text{ (4.91 ม./วินาที}^2\text{)} \quad (5)$$

จากตารางที่ 5 ค่าความเร่งสูงสุดตามมาตรฐาน UIC 776-2R ได้ระบุข้อจำกัดของค่าการความเร่งสูงสุดเท่ากับ



รูปที่ 20 ค่าการความเร่งกลางสะพานต่อความเร็ว

0.5 g (4.91 ม./วินาที<sup>2</sup>) และผลจากการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพานและรถไฟพบว่า ค่าความเร่งตัวของสะพานมีค่าสูงสุดเท่ากับ 2.71 ม./วินาที<sup>2</sup> ที่ความเร็ว 100 กม./ชม. ยังเหลือช่วงความปลอดภัยเมื่อเทียบกับมาตรฐานร้อยละ 44.81 ดังรูปที่ 20

ตารางที่ 5 ผลการวิเคราะห์การความเร่งของสะพานและค่าร้อยละคงเหลือเทียบกับมาตรฐาน UIC 776-2R

รายการ	ค่า
ค่าความเร่งที่มาตรฐาน UIC 776-2R กำหนด (ม./วินาที <sup>2</sup> )	4.91
ค่าความเร่งจากการวิเคราะห์สูงสุด (ม./วินาที <sup>2</sup> )	2.71 (100 กม./ชม.)
ร้อยละความปลอดภัยคงเหลือ	44.81

#### 4. สรุป

1) จากผลการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพานและรถไฟด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดีที่ถูกพัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้พบว่า มีค่าใกล้เคียงกับผลการตรวจวัดจริงในสภาวะสถิตย์ แต่ในสภาวะพลวัตผลลัพธ์ที่ได้พบว่า มีค่าแปรปรวนค่อนข้างสูง อันอาจจะเนื่องมาจากปัจจัยภายนอก เช่น ความไม่สม่ำเสมอของทางวิ่ง ซึ่งหากมีการดำเนินการตรวจวัดและเก็บข้อมูลความผิดปกติของรางและทางวิ่งอาจจะช่วยให้สามารถปรับแก้แบบจำลองให้มีความแม่นยำได้มากขึ้น

2) จากผลการเปรียบเทียบความแม่นยำของ

กระบวนการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างรถไฟและสะพานด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดีกับการทดสอบจริง พบว่า

2.1) ค่าการแอ่นตัวกลางสะพานของผลการวิเคราะห์กับผลการทดสอบมีค่าใกล้เคียงกัน โดยร้อยละความแตกต่างสูงสุดเพียง 14.81

2.2) ค่าความเร่งกลางสะพานของผลการวิเคราะห์กับผลการทดสอบมีความแปรปรวนสูง โดยมีค่าร้อยละความแตกต่างสูงสุดถึง 52.36

3) ผลการประเมินระดับความปลอดภัยของสะพานรถไฟโครงการรถไฟฟ้าแอร์พอร์ต เรล ลิงก์ ตามมาตรฐาน UIC 776-2R พบว่า

3.1) ค่าความถี่ธรรมชาติของสะพานรถไฟยังอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานกำหนด

3.2) ค่าการโก่งตัวกลางสะพานยังอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานกำหนด โดยมีค่าร้อยละความปลอดภัยคงเหลือเท่ากับ 95.08

3.3) ค่าความเร่งกลางสะพานยังอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานกำหนด โดยมีค่าร้อยละความปลอดภัยคงเหลือของค่าความเร่งเท่ากับ 44.81

4) จากผลการวิเคราะห์หาค่าความเร่งและค่าการโก่งตัวกลางสะพานจะมีค่าสูงที่ความเร็ว 100 และ 125 กม./ชม. ตามลำดับ ผลที่ได้มีค่าสูงกว่าค่าที่ได้จากความเร็วสูง (180 กม./ชม.) เนื่องจากพฤติกรรมของการสั่นพ้อง (Resonance) เพราะขณะรถไฟวิ่งผ่านสะพานจะเกิดแรงที่ลึกระทำต่อสะพานแบบซ้ำจากล้อรถไฟที่มีจำนวนมากและมีระยะห่างของล้อที่คงที่ ทำให้เกิดความถี่ของแรงค่าหนึ่งที่จะแปรผันตามความเร็ว จากเหตุการณ์ข้างต้นพบว่า ช่วงความเร็วที่ 100-125 กม./ชม.ทำให้เกิดพฤติกรรมดังกล่าว

5) การวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างสะพานและรถไฟด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองมัลติบอดีสามารถช่วยให้วิเคราะห์พฤติกรรมทางพลศาสตร์ที่ซับซ้อนระหว่างตัวรถไฟและสะพานได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตาม ยังมีข้อจำกัดด้านข้อมูลที่จำเป็นในการสร้างแบบจำลองให้มีความแม่นยำ ดังกรณีการวิจัยครั้งนี้ ที่ยัง

ขาดข้อมูลความไม่สม่ำเสมอของทางวิ่งในสภาพหน้างานจริง จึงอาจทำให้ค่าความเร่งกลางสะพานนั้นมีความแปรปรวนค่อนข้างสูง

## 5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณบริษัทรถไฟฟ้า รฟท. จำกัด และสถานวิจัยเพื่อความเป็นเลิศทางด้านนวัตกรรมถนนและระบบราง คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ในการสนับสนุนงานวิจัย

## เอกสารอ้างอิง

- [1] W. Zhai, Z. Han, Z. Chen, L. Ling, and S. Zhu, "Train-track-bridge dynamic interaction: A state-of-the-art review," *Vehicle System Dynamics*, vol. 57, no. 7, pp. 984–1027, 2019.
- [2] D. Cantero and A. Rønnquist, "Numerical evaluation of modal properties change of railway bridges during train passage," *Procedia Engineering*, vol. 199, pp. 2931–2936, 2017.
- [3] V. N. Dinh, K. D. Kim, and P. Warnitchai, "Dynamic analysis of three-dimensional bridge-high-speed train interactions using a wheel-rail contact model," *Engineering Structures*, vol. 31, no. 12, pp. 3090–3106, 2009.
- [4] K. Grębowski and M. Zielińska, "Dynamic analysis of historic railway bridges in Poland in the context of adjusting them to Pendolino trains," *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 20, no. 2, pp. 283–297, 2015.
- [5] H. Li, H. Xia, M. Soliman, and D. Frangopol, "Bridge stress calculation based on the dynamic response of coupled train-bridge system," *Engineering Structures*, vol. 99, pp. 334–345, 2015.
- [6] N. Zhang, Y. Tian, and H. Xia, "A train-bridge dynamic interaction analysis method and its experimental validation," *Engineering*, vol. 2, no. 4, pp. 528–536, 2016.
- [7] S. Schneider and S. Marx, "Design of railway bridges for dynamic loads due to high-speed traffic," *Engineering Structures*, vol. 174, pp. 396–406, 2018.
- [8] H. Zhao, Y. Ding, and A. Li, "Dynamic performance evaluation of a high-speed four-track railway bridge traversed by multiple trains," *Journal of Performance of Constructed Facilities*, vol. 32, no. 1, pp. 04017130, 2018.
- [9] Y. Shan, Y. Shu, and S. Zhou, "Finite-infinite element coupled analysis on the influence of material parameters on the dynamic properties of transition zones," *Construction and Building Materials*, vol. 148, pp. 548–558, 2017.
- [10] H. Wang and V. Markine, "Corrective countermeasure for track transition zones in railways: Adjustable fastener," *Engineering Structures*, vol. 169, pp. 1–14, 2018.
- [11] K. Giannakos and S. Tsoukantas, "Transition zone between ballastless and ballasted track: Influence of changing stiffness on acting forces," *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, vol. 48, pp. 3548–3557, 2012.
- [12] J. M. Olmos and M. Á. Astiz, "Non-linear vehicle-bridge-wind interaction model for running safety assessment of high-speed trains over a high-pier viaduct," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 419, pp. 63–89, 2018.
- [13] D. P. Connolly, P. Galvin, B. Olivier, A. Romero, and G. Kouroussis, "A 2.5D time-frequency domain model for railway induced soil-building



- vibration due to railway defects,” *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 120, pp. 332–344, 2019.
- [14] J. Hu, Y. Luo, Z. Ke, P. Liu, and J. Xu., “Experimental study on ground vibration attenuation induced by heavy freight wagons on a railway viaduct,” *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 37, no. 4, pp. 881–895, 2018.
- [15] J. Luo, S. Zhu, and W. Zhai, “An efficient model for vehicle-slab track coupled dynamic analysis considering multiple slab cracks,” *Construction and Building Materials*, vol. 215, pp. 557–568, 2019.
- [16] D. Gorbatjuk, G. Brandstetter, and J. Fink, “Investigations for simplified consideration of train-bridge-interaction based on railjet high-speed train,” *Procedia Engineering*, vol. 156, pp. 116-123, 2016.
- [17] F. Ribes-Llario, C. Zamorano-Martín, S. Morales-Ivorra, and J. Real-Herráiz., “Study of vibrations in a short-span bridge under resonance conditions,” *Journal of Vibroengineering*, vol. 18, no. 5, pp. 3186–3196, 2016.
- [18] C. Mellier, “Optimal design of bridges for high-speed trains: Single and double-span bridges,” M.S. thesis, Department of Civil and Architectural Engineering, Division of Structural Design and Bridges, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2010.
- [19] Y. Song, Y. Du, X. Zhang, and B. Sun, “Evaluating the effect of wheel polygons on dynamic track performance in high-speed railway systems using Co-simulation analysis,” *Applied Sciences*, vol 9, no. 19, pp. 4165, 2019.
- [20] *Union Internationale des Chemins de fer (UIC)*, UIC 776-2R: Design requirements for rail-bridges based on interaction phenomena between train, track and bridge”, Attribution Non-Commercial (BY-NC) 2<sup>nd</sup> edition, June 2009.
- [21] J. J. Kalker, “A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact,” *Vehicle System Dynamics*,” vol. 11, pp. 1–13, 1982.
- [22] T. Arvidsson and A. Andersson, “Train-track-bridge interaction for non-ballasted railway bridges on high-speed lines,” *Structural Engineering and Bridges*, 2017.
- [23] D. Gong, J. Zhou, W. Sun, Y. Sun, and Z. Xia, “Method of multi-mode vibration control for the carbody of high-speed electric multiple unit trains,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 409, pp. 94–111, 2017.