บทความวิจัย

การแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียวที่พัฒนาด้วยการแปลงแบบล็อก-เอกซ์โพ

กนิษฐา ยิ้มนาค*
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
กรรณิการ์ ยิ้มนาค
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 2549 4137-8 อีเมล: kanittha_y@rmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2022.08.004
รับเมื่อ 2 กุมภาพันธ์ 2564 แก้ไขเมื่อ 16 เมษายน 2564 ตอบรับเมื่อ 17 พฤษภาคม 2564 เผยแพร่ออนไลน์ 4 สิงหาคม 2565

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียวด้วยการแปลงแบบล็อก-เอกซ์โพ (LET-Lindley) และการแจกแจงล็อก-เอกซ์โพตัดปลาย (TLET-Lindley) การแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียวที่พัฒนาขึ้นมีการนำเสนอฟังก์ชันการรอดชีพ ฟังก์ชันพิบัติ โมเมนต์ และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ตลอดจนการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงที่เป็นข้อมูลชั่วชีวิต 3 ชุด ผลการศึกษาพบว่า การแจกแจงที่พัฒนาขึ้นมีความสอดคล้องกับข้อมูลจริงมากกว่าการแจกแจงลินเลย์ที่เป็นการแจกแจงต้นกำเนิด อย่างไรก็ตาม การแจกแจง TLET-Lindley เป็นการแจกแจงที่ใกล้เคียงกับข้อมูลจริงทั้ง 3 ชุด มากที่สุด เนื่องจากมีค่าเกณฑ์เอไอซี (AIC) และค่าเกณฑ์ข้อสนเทศของเบย์ (BIC) ต่ำสุด และมีค่าทดสอบของโคโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ (K-S test) ที่ให้ค่า *p*-value สูงกว่า

คำสำคัญ: การแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียว การแปลงแบบล็อก-เอกซ์โพ การแจกแจงตัดปลาย การประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

การอ้างอิงบทความ: กนิษฐา ยิ้มนาค และ กรรณิการ์ ยิ้มนาค, “การแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียวที่พัฒนาด้วยการแปลงแบบล็อก-เอกซ์โพ,” *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 33, ฉบับที่ 1, หน้า 168–178, ม.ค.–มี.ค. 2566.

Research Article

Developed One-parameter Lindley Distribution Using the Log-expo Transformation

Kanittha Yimnak
Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Thanyaburi, Pathum Thani, Thailand
Kannika Yimnak
School of Science and Technology, Sukhothai Thammathirat Open University, Nonthaburi, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0 2549 4137-8, E–mail: kanittha_y@rmutt.ac.th
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2022.08.004
Received 2 February 2021; Revised 16 April 2021; Accepted 17 May 2021; Published online: 4 August 2022

Abstract

The purposes of this study are to develop a one-parameter Lindley distribution using the log-expo transformation (LET-Lindley) and truncating the developed Lindley distribution (TLET-Lindley). The proposed distributions are presented in term of the survival function, hazard function, moment and parameter estimation using maximum likelihood. Moreover, the new distributions are applied in three real lifetime datasets. The results show that the proposed distributions are a better fit for the real datasets than Lindley distribution, the baseline distribution. However, the TLET-Lindley distribution provides the most consistent distribution for the datasets because it provides the lowest values of Akaike's Information Criterion (AIC) and Bayesian Information Criterion (BIC). Moreover, the Kolmogorov-Smirnov tests are found to give high *p*-values.

Keywords: One-parameter Lindley Distribution, The Log-expo Transformation, Truncated Distribution, Maximum Likelihood Estimation

Please cite this article as: K. Yimnak and K. Yimnak, "Developed one-parameter lindley distribution using the log-expo transformation," *The Journal of KMUTNB*, vol. 33, no. 1, pp. 168–178, Jan.–Mar. 2023 (in Thai).

1. บทนำ

ข้อมูลชั่วชีวิต (Lifetime Data) คือ ข้อมูลที่ใช้วัดอายุการใช้งานในงานหลายๆ ศาสตร์ เช่น ในงานด้านวิศวกรรม ชีววิทยา และทางการแพทย์ ตัวอย่างการประยุกต์ทางด้านวิศวกรรม เช่น ระยะเวลาที่ชิ้นส่วนอุปกรณ์จะหมดอายุการใช้งาน หรือควรจะได้รับการซ่อมแซมในช่วงเวลาใด ตัวอย่างการประยุกต์ทางด้านการแพทย์ เช่น ระยะเวลาการเติบโตของเซลล์มะเร็ง และระยะเวลาการแพร่ของโรคระบาด ในอดีตที่ผ่านมาการแจกแจงของข้อมูลชั่วชีวิตสามารถอธิบายได้ด้วยการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential) และลินเลย์ (Lindley) [1]–[3] การแจกแจงลินเลย์คือการแจกแจงที่ผสมระหว่างการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) ด้วยค่าพารามิเตอร์บ่งขนาด (Scale Parameter) θ และการแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) ด้วยค่าพารามิเตอร์บ่งขนาด และพารามิเตอร์บ่งรูปร่าง (Shape Parameter) คือ 2 และ θ ตามลำดับ [4] การแจกแจงดังกล่าวเป็นที่นิยมแพร่หลายในการสร้างตัวแบบสำหรับข้อมูลชั่วชีวิต Shanker และคณะ [5]–[7] ได้พัฒนาการแจกแจงลินเลย์แบบสองพารามิเตอร์ เพื่อให้การแจกแจงมีความใกล้เคียงกับลักษณะการแจกแจงของข้อมูลจริงมากยิ่งขึ้น การแจงแจงลินเลย์ถูกพัฒนาขึ้นอย่างต่อเนื่องเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของตัวแบบการแจกแจงให้สอดคล้องใกล้เคียงกับข้อมูลจริง และเพิ่มประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ยกตัวอย่างเช่น Singh [8] พัฒนาการแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียวตัดปลาย โดยนำเสนอคุณสมบัติทางสถิติ ได้แก่ โมเมนต์ (Moment) ฟังก์ชันควอนไทล์ (Quantile Function) สถิติอันดับ (Order Statistics) การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) ตลอดจนการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง Aryuyuen [9] เสนอการแจกแจงลินเลย์สองพารามิเตอร์ที่ถูกตัดปลาย โดยได้นำเสนอในรูปแบบของคุณสมบัติทางสถิติ ได้แก่ ฟังก์ชันการรอดชีพ (Survival Function) ฟังก์ชันพิบัติ (Hazard Function) โมเมนต์ และการประมาณค่าพารามิเตอร์

Aslam และคณะ [10] ได้นำเสนอการแปลงการแจกแจงชั่วชีวิตด้วยรูปแบบล็อก-เอกซ์โพ (Log-expo Transformation; LET) ดังสมการที่ (1)

$$G(x;\lambda,\Theta)=\frac{\log\left\{2-e^{-\lambda F(x;\Theta)}\right\}}{\log\left\{2-e^{-\lambda}\right\}} \tag{1}$$

เมื่อ $G(x,\lambda,\Theta)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Probability Distribution Function; CDF) ด้วยค่าพารามิเตอร์ Θ ที่เป็นจำนวนจริง และ λ คือ ค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่าง ฟังก์ชันการแจกแจงความหนาแน่นน่าจะเป็น (Probability Density Function; PDF) ของการแจกต้นกำเนิดด้วยรูปแบบล็อก-เอกซ์โพแสดงดังสมการที่ (2)

$$g(x;\lambda,\Theta)=\frac{\lambda f(x;\Theta)e^{-\lambda F(x;\Theta)}}{\log\left\{2-e^{-\lambda}\right\}\left\{2-e^{-\lambda F(x;\Theta)}\right\}} \tag{2}$$

เมื่อ $F(x,\Theta)$ คือ CDF ของการแจกแจงต้นกำเนิด
$f(x,\Theta)$ คือ PDF ของการแจกแจงต้นกำเนิด
λ คือ ค่าพารามิเตอร์บ่งรูปร่าง

การแจกแจงที่แปลงด้วยรูปแบบล็อก-เอกซ์โพ จะมีคุณลักษณะคือมีความยืดหยุ่นและสอดคล้องกับข้อมูลจริง

การแจกแจงตัดปลาย (Truncated Distribution) จากการแจกแจงต้นกำเนิด (Parent Distribution) เป็นอีกหนึ่งวิธีในการพัฒนาการแจกแจงของข้อมูลชั่วชีวิต วิธีดังกล่าวถูกนำเสนอและประยุกต์ใช้กับการแจกแจงปรกติ (Normal Distribution) [11], [12] อีกทั้งยังมีการประยุกต์กับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล [13] การตัดปลายการแจกแจงต้นกำเนิด จะทำให้ได้การแจกแจงที่ใกล้เคียงกับลักษณะการแจกแจงของข้อมูลจริงมากขึ้น

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจึงพัฒนาการแจกแจงลินเลย์ในรูปแบบการแปลงแบบล็อก-เอกซ์โพ โดยใช้ชื่อว่าการแจกแจง LET-Lindley (Log-expo Lindley Distribution) และการตัดปลายของการแจกแจงที่พัฒนาขึ้นดังกล่าว โดยใช้ชื่อว่า TLET-Lindley (Truncated Log-expo Lindley

Distribution) ตลอดจนการศึกษาคุณสมบัติทางสถิติ และการประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง พร้อมทั้งการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการแจกแจงที่พัฒนาขึ้นทั้ง 2 การแจกแจง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1) การแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียว

Lindley [4] เสนอ PDF และ CDF ของการแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียว แสดงดังสมการที่ (3) และ (4) ตามลำดับ

$$f(x;\theta)=\frac{\theta^2}{\theta+1}(1+x)e^{-\theta x} \tag{3}$$

$$F(x;\theta)=1-\frac{\theta+\theta x+1}{\theta+1}e^{-\theta x} \tag{4}$$

เมื่อ X คือ ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

$\theta>0$ คือ ค่าพารามิเตอร์บ่งขนาด

2) การแจกแจงที่ถูกตัดปลาย

กำหนดให้ x เป็นการแจกแจงที่ถูกตัดปลายทั้งสองด้านในช่วง $T=[a,b]$ โดยมีเงื่อนไข $-\infty,<a\le x\le b<\infty$ และกำหนดให้ Θ คือ ค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการแจกแจงใดๆ หรือการแจกแจงต้นกำเนิด ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X เขียนได้ดังสมการที่ (5) [14]

$$g(x;\Theta,a,b)=\frac{f(x;\Theta)}{F(b;\Theta)-F(a;\Theta)} \tag{5}$$

โดยที่ $-\infty,<a\le X\le b<\infty$

เมื่อ $f(x)=\begin{cases} g(x)\ ; a\le x\le b \\ 0\quad ;\text{ otherwise}\end{cases}$

โดยที่ $g(x|a\le X\le b)$ มีคุณสมบัติ $g(x)\ge 0$; สำหรับทุกๆ x และ

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x\,|\,a\le X\le b)\,dx &= \frac{1}{F(b)-F(a)}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{F(b)-F(a)}\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{1}{F(b)-F(a)}\big[F(b)-F(a)\big]=1\end{aligned}$$

การตัดปลายการแจกแจงไม่จำเป็นต้องตัดปลายทั้งด้านบน (Above) และด้านล่าง (Below) อาจจะตัดปลายเฉพาะด้านบนหรือด้านล่างด้านใดด้านหนึ่งตามความเหมาะสม

2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

2.1 พัฒนาการแจกแจงลินเลย์

โดยการแปลงด้วยวิธีล็อก-เอกซ์โพ (LET-Lindley) พร้อมทั้งศึกษาคุณสมบัติบางประการทางสถิติ ได้แก่ ฟังก์ชันการรอดชีพ ($S(x)$) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ประมาณอัตราการรอดชีพเมื่อผ่านจุดเวลาที่กำหนด ฟังก์ชันพิบัติ ($H(x)$) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของ PDF ต่อ ($S(x)$) และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

2.2 พัฒนาการแจกแจง LET-Lindley

โดยการตัดปลายการแจกแจงดังกล่าว หรือที่เรียกว่าการแจกแจง TLET-Lindley พร้อมทั้งศึกษาคุณสมบัติบางประการทางสถิติ ได้แก่ ($S(x)$) ($H(x)$) และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

2.3 การประยุกต์การแจกแจงที่พัฒนาขึ้นกับข้อมูลจริง

3. ผลการทดลอง

3.1 การแจกแจง LET-Lindley

PDF และ CDF ของการแจกแจง LET-Lindley แสดงดังสมการที่ (6) และ (7) ตามลำดับ

$$g_1(x;\lambda,\theta)=\frac{\lambda\left(\frac{\theta^2}{\theta+1}\right)(1+x)e^{-\theta x}e^{-\lambda\left(1-\frac{\theta+\theta x+1}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}}{\log\left\{2-e^{-\lambda}\right\}\left\{2-e^{-\lambda\left(1-\frac{\theta+\theta x+1}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right\}} \tag{6}$$

$$G_1(x;\lambda,\theta)=\frac{\log\left\{2-e^{-\lambda\left(1-\frac{\theta+\theta x+1}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right\}}{\log\left\{2-e^{-\lambda}\right\}} \tag{7}$$

1) ฟังก์ชันการรอดชีพและฟังก์ชันพิบัติของการ

แจกแจง LET-Lindley เขียนได้ดังสมการที่ (8) และ (9) ตามลำดับ

$$S_1(x;\lambda,\theta) = 1 - G_1(x;\lambda,\theta)$$

$$S_1(x;\lambda,\theta) = 1 - \frac{\log\left\{2 - e^{-\lambda\left(1-\frac{\theta+\theta x+1}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right\}}{\log\left\{2-e^{-\lambda}\right\}} \quad (8)$$

กำหนดให้ $M = e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}$

$$H_1(x;\lambda,\theta) = \frac{g_1(x;\lambda,\theta)}{S_1(x;\lambda,\theta)}$$

$$H_1(x;\lambda,\theta) = \frac{\lambda\theta^2(x+1)e^{-\theta x}M}{(\theta+1)(2-M)\left(\log(2-e^{-\lambda}) - \log(2-M)\right)} \quad (9)$$

2) การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการแจกแจง LET-Lindley

ให้ $x_1, x_2,..., x_n$ เป็นค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจง LET-Lindley ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงดังกล่าว เขียนได้ดังสมการที่ (10)

$$L_1(\Theta) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda f(x_i;\Theta)e^{-\lambda F(x_i;\Theta)}}{\log\left\{2-e^{-\lambda}\right\}\left\{2-e^{-\lambda F(x_i;\Theta)}\right\}}\right] \quad (10)$$

เมื่อ $f(x_i;\ \Theta)$ และ $F(x_i;\ \Theta)$ คือ PDF และ CDF ของการแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียว ตามลำดับ ฟังก์ชันลอการิทึม (Log-likelihood Function) แสดงดังสมการที่ (11)

$$\begin{aligned} LL_1(\Theta) = {} & n\log\lambda + \sum_{i=1}^{n}\log\left\{f(x_i;\Theta)\right\} - \lambda\sum_{i=1}^{n}F(x_i;\Theta) \\ & - n\log\left[\log\left\{2-e^{-\lambda}\right\}\right] - \sum_{i=1}^{n}\log\left\{2-e^{-\lambda F(x_i;\Theta)}\right\} \end{aligned} \quad (11)$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ และ θ โดยการอนุพันธ์ฟังก์ชันลอการิทึม เทียบกับ λ และ θ

$$\frac{\partial LL_1(\Theta)}{\partial\lambda} = 0 \text{ และ } \frac{\partial LL_1(\Theta)}{\partial\theta} = 0$$

ซึ่งการหาคำตอบของสมการดังกล่าว ใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson)

3.2 การแจกแจง TLET-Lindley

กำหนดให้ $A = \log\left\{2 - e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta a+1)}{\theta+1}e^{-\theta a}\right)}\right\}$

และ $B = \log\left\{2 - e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta b+1)}{\theta+1}e^{-\theta b}\right)}\right\}$

การแจกแจง TLET-Lindley เขียนได้ดังสมการที่ (12)

$$g_2(x:\lambda,\theta) = \frac{\lambda\theta^2(x+1)e^{-\theta x}e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}}{(\theta+1)(B-A)\left[2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right]} \quad (12)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_a^b g_2(x;\lambda,\theta,a,b)\,dx &= \frac{\lambda}{(B-A)}\int_a^b\left(\frac{f(x;\theta)e^{-\lambda F(x,\theta)}}{(2-e^{-\lambda F(x;\theta)})}\right)dx \\ &= \frac{\lambda}{(B-A)}\int_a^b\left(\frac{1}{\lambda(2-e^{-\lambda F(x;\theta)})}\right)d(2-e^{-\lambda F(x;\theta)}) \\ &= \frac{1}{(B-A)}\left[\log\left\{2-e^{-\lambda F(x;\theta)}\right\}\right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{1}{(B-A)}\left[\log\left\{2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta b+1)}{\theta+1}e^{-\theta b}\right)}\right\}\right. \\ &\qquad \left. -\log\left\{2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta a+1)}{\theta+1}e^{-\theta a}\right)}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{(B-A)}\left[B-A\right] = 1 \end{aligned}$$

CDF ของการแจกแจงดังกล่าว สามารถเขียนดังสมการที่ (13)

$$G_2(x;\lambda,\theta) = \frac{\left[\log\left\{2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right\} - A\right]}{B-A} \quad (13)$$

1) ฟังก์ชันการรอดชีพ และฟังก์ชันพิบัติของการแจกแจง TLET-Lindley แสดงดังสมการที่ (14) และ (15) ตามลำดับ

$$S_2(x;\lambda,\theta)=1-G_2(x;\lambda,\theta)$$
$$=\frac{B-\log\left\{2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right\}}{B-A} \qquad (14)$$

$$H_2(x;\lambda,\theta)$$
$$=\frac{\lambda\theta^2(x+1)e^{-\theta x}e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}}{(\theta+1)\left[B-\log\left\{2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right\}\right]\left[2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x+1)}{\theta+1}e^{-\theta x}\right)}\right]} \qquad (15)$$

2) การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการแจกแจง TLET-Lindley

ให้ $x_1, x_2,..., x_n$ เป็นค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจง TLET-Lindley พิจารณาค่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงดังกล่าว เขียนได้ดังสมการที่ (16)

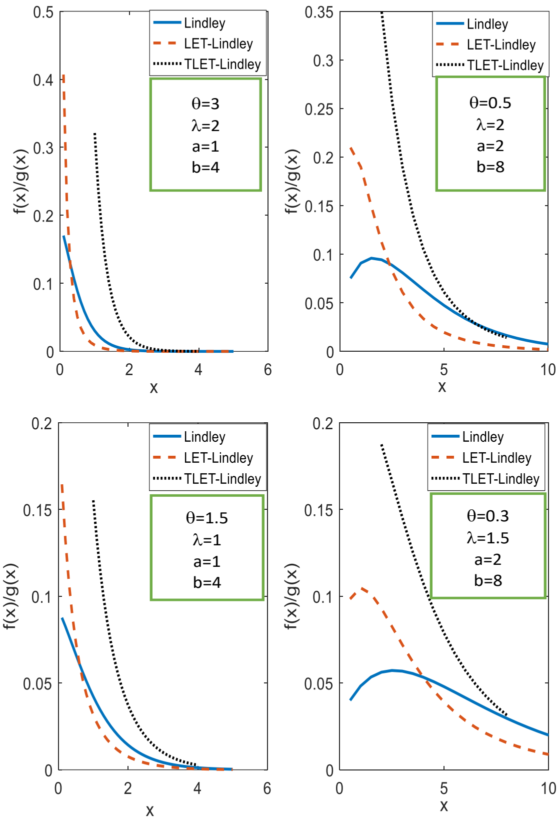
$$L_2(\Theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda\theta^2(x_i+1)e^{-\theta x_i}e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x_i+1)}{\theta+1}e^{-\theta x_i}\right)}}{(\theta+1)(B-A)\left[2-e^{-\lambda\left(1-\frac{(\theta+\theta x_i+1)}{\theta+1}e^{-\theta x_i}\right)}\right]}\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda f(x_i;\theta)e^{-\lambda F(x_i,\theta)}}{(B-A)(2-e^{-\lambda F(x_i;\theta)})}\right] \qquad (16)$$

ฟังก์ชันลอการิทึมของความเป็นไปได้แสดงดังสมการที่ (17)

$$LL_2(\Theta)=n\log\left(\frac{\lambda}{B-A}\right)+\sum_{i=1}^{n}(\log f(x_i:\theta))$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(\lambda F(x_i:\theta))-\sum_{i=1}^{n}(\log(2-e^{-\lambda F(x_i:\theta)})) \qquad (17)$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ และ θ เมื่อ $\frac{\partial LL_2(\Theta)}{\partial\lambda}=0$ และ $\frac{\partial LL_2(\Theta)}{\partial\theta}=0$ ใช้ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน เช่นเดียวกันกับการแจกแจง LET-Lindley

ตัวอย่างการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีดังกล่าวแสดงดังตารางที่ 2 ถึงตารางที่ 4 ตามลำดับ สำหรับรูปที่ 1 กราฟเปรียบเทียบการแจกแจง Lindley LET-Lindley และ TLET-Lindley ซึ่งจากรูปที่ 1 แสดงให้เห็นว่า PDF ของการแจกแจง TLET-Lindley สูงกว่า LET-Lindley และ Lindley



รูปที่ 1 เปรียบเทียบการแจกแจง Lindley, LET-Lindley และ TLET-Lindley

เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์แตกต่างกัน เมื่อพิจารณาจาก PDF ของการแจกแจง LET-Lindley พบว่า มีค่าสูงกว่าการแจกแจง Lindley ในช่วงที่ค่าของ X มีค่าต่ำ แต่ค่า PDF มีค่าลดลงเมื่อ X มีค่าสูงขึ้น กราฟของ $F(x)$ $S(x)$ และ $H(x)$ ของการแจกแจง LET-Lindley และ TLET-Lindley แสดงดังรูปที่ 2 และรูปที่ 3 ตามลำดับ

โมเมนต์หรือ $\mu_k^{'}=E(X^k)$ ของการแจกแจง LET-Lindley และ TLET-Lindley ไม่อยู่ในรูปแบบปิด (Closed Form) ในการศึกษาครั้งนี้ จึงแสดงค่าโมเมนต์ที่มีค่าพารามิเตอร์ต่างๆ กันของการแจกแจงทั้ง 2 แบบ ที่พัฒนาขึ้นในตารางที่ 1 ซึ่งการคำนวณค่าโมเมนต์รอบที่ 1 ถึงรอบที่ 4 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน สัมประสิทธิ์ความเบ้ และสัมประสิทธิ์ความโด่ง โดยใช้โปรแกรมการคำนวณทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ

ตารางที่ 1 โมเมนต์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) สัมประสิทธ์ความเบ้ (SC) และสัมประสิทธิ์ความโด่ง (KC) เมื่อกำหนดค่า λ และ θ ต่างๆ กัน

การแจกแจง	โมเมนต์	λ = 0.5, θ = 3	λ = 1, θ = 2.5	λ = 1.5, θ =2.5	λ = 2, θ = 3
LET-Lindley	$M_X^{(1)}$	1.3802	0.8931	0.1594	0.2486
	$M_X^{(2)}$	4.3852	1.7943	0.3025	0.1743
	$M_X^{(3)}$	24.1904	5.7901	0.6808	0.2315
	$M_X^{(4)}$	196.9370	13.6119	9.7987	0.4648
	SD	1.5749	0.9983	0.7343	0.3354
	SC	2.8907	2.4194	3.1834	3.5045
	KC	16.6820	–0.3968	19.3319	22.7382
TLET-Lindley a = 1, b = 5	$M_X^{(1)}$	2.1048	1.8182	1.6641	1.4987
	$M_X^{(2)}$	5.3443	3.9545	3.1060	2.5177
	$M_X^{(3)}$	16.0053	10.3305	6.9900	4.8694
	$M_X^{(4)}$	54.3311	6.4703	28.3691	11.0027
	SD	0.9561	1.7189	0.7767	0.5212
	SC	1.0396	0.0920	1.6019	1.9926
	KC	3.2995	1.2564	5.4088	8.2256

ตารางที่ 2 การประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบประสิทธิภาพการแจกแจงด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของข้อมูลชุดที่ 1

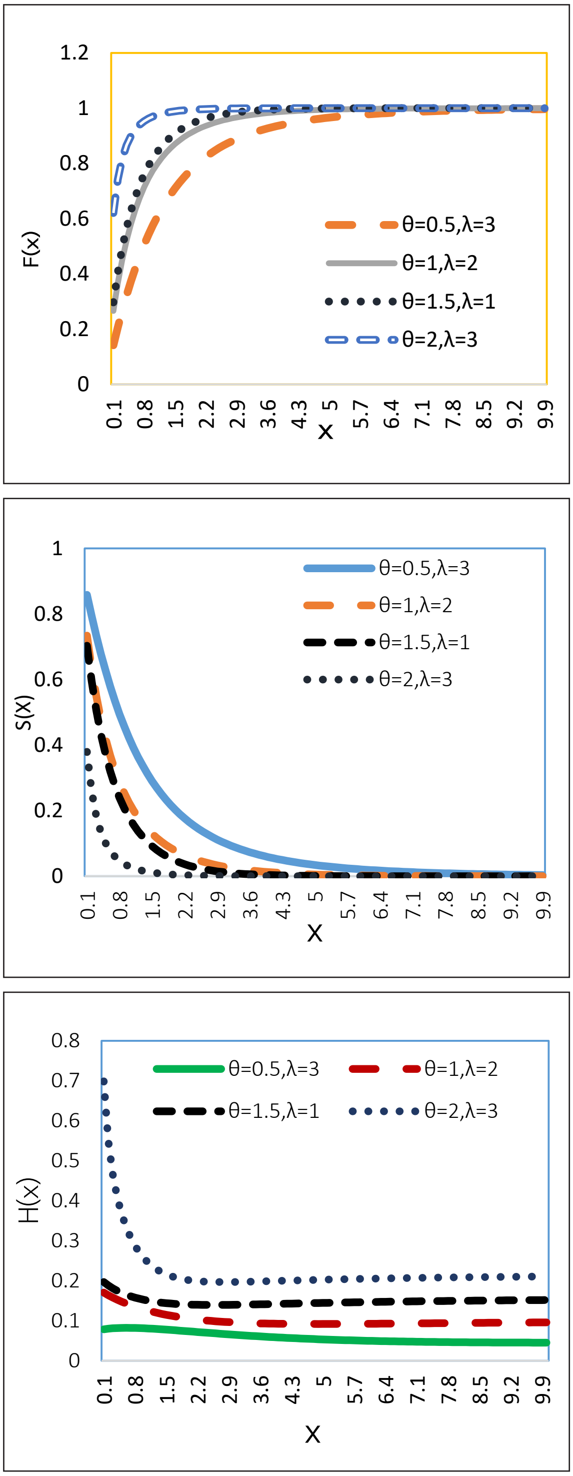
การแจกแจง	พารามิเตอร์	ค่าประมาณพารามิเตอร์	–LL	AIC	BIC	K-S Statistics (*p*-values)
Lindley	θ	0.8238	56.3037	114.6073	116.1337	0.1326 (0.5440)
LET-Lindley	λ	1.4373	55.3399	114.6798	117.7325	0.0776 (0.9768)
	θ	0.5520				
TLET-Lindley	λ	2.0660	52.9333	113.8666	119.9720	0.1038 (0.8208)
	θ	0.4805				
	a	0.1				
	b	8				

ตารางที่ 3 การประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบประสิทธิภาพการแจกแจงด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของข้อมูลชุดที่ 2

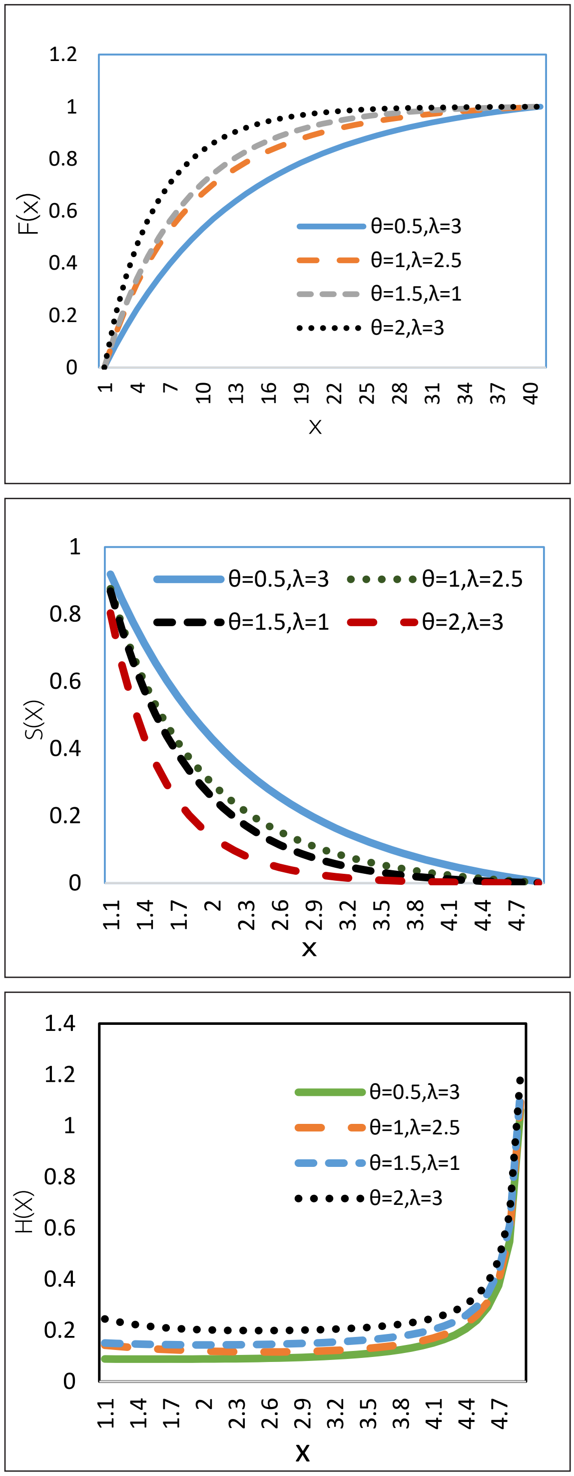
การแจกแจง	พารามิเตอร์	ค่าประมาณพารามิเตอร์	–LL	AIC	BIC	K-S Statistics (*p*-values)
Lindley	θ	0.659	119.1900	240.380	242.610	0.4045 (<0.01)
LET-Lindley	λ	1.6225	126.9698	257.9396	262.4078	0.3646 (<0.01)
	θ	0.3444				
TLET-Lindley	λ	0.3322	66.1523	140.3046	149.2410	0.1788 (0.0212)
	θ	0.7707				
	a	1.3120				
	b	3.8580				

ตารางที่ 4 การประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบประสิทธิภาพการแจกแจงด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของข้อมูลชุดที่ 3

การแจกแจง	พารามิเตอร์	ค่าประมาณพารามิเตอร์	–LL	AIC	BIC	K-S Statistics (*p*-values)
Lindley	θ	0.8162	32.835	67.67	68.6657	0.3911 (<0.01)
LET-Lindley	λ	1.7132	32.3377	68.6754	70.6669	0.3709 (<0.01)
	θ	0.4232				
TLET-Lindley	λ	9.8981	16.1082	40.2164	44.1993	0.1369 (0.8000)
	θ	0.2819				
	a	1.1				
	b	4.1				



รูปที่ 2 กราฟ $F(x)$, $S(x)$ และ $H(x)$ ของการแจกแจง LET-Lindley



รูปที่ 3 กราฟ $F(x)$, $S(x)$ และ $H(x)$ ของการแจกแจง TLET-Lindley

3) การประยุกต์การแจกแจงที่พัฒนาขึ้นกับข้อมูลจริง การแจกแจงที่พัฒนาขึ้นทั้ง 2 วิธี LET-Lindley $(x ; \lambda, \theta)$ และ TLET-Lindley $(x ; \lambda, \theta, a, b)$ ประยุกต์กับข้อมูลจริง 3 ชุด และทำการเปรียบเทียบผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ λ และ θ ตามลำดับ ในส่วนของค่า a และ b จากการแจกแจงแบบ TLET-Lindley ถูกแทนด้วยค่าต่ำสุด และค่าสูงสุดของข้อมูลจริงแต่ละชุด สำหรับข้อมูลชั่วชีวิตที่เป็นข้อมูลจริง 3 ชุด ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ ได้แก่

ข้อมูลชุดที่ 1 ข้อมูลไวนิลคลอไรด์ (หน่วย : mg/l) จากการทำความสะอาด หลุมตรวจสอบการไล่ระดับสี [15]

5.1	1.2	1.3	0.6	0.5	2.4	0.5	1.1
8	0.8	0.4	0.6	0.9	0.4	2	0.5
5.3	3.2	2.7	2.9	2.5	2.3	1	0.2
0.1	0.1	1.8	0.9	2	4	6.8	1.2
0.4	0.2						

ข้อมูลชุดที่ 2 ข้อมูลค่าความต้านทานแรงดึง (หน่วย : GPa) ของเส้นใยคาร์บอน 69 เส้น ทดสอบภายใต้แรงดึงที่ระยะทดสอบ (Gauge Length) 20 mm. [16]

1.312	1.314	1.479	1.552	1.7	1.803	1.861
1.865	1.944	1.958	1.966	1.997	2.006	3.233
2.021	2.027	2.055	2.063	2.098	2.14	2.179
2.224	2.24	2.253	2.27	2.272	2.274	3.433
2.301	2.301	2.359	2.382	2.382	2.426	2.434
2.435	2.478	2.49	2.511	2.514	2.535	3.585
2.554	2.566	2.57	2.586	2.629	2.633	2.642
2.648	2.684	2.697	2.726	2.77	2.773	3.858
2.8	2.809	2.818	2.821	2.848	2.88	2.954
3.012	3.067	3.084	3.09	3.096	3.128	

ข้อมูลชุดที่ 3 ข้อมูลระยะเวลาในการบรรเทาอาการ (หน่วย : นาที) หลังจากได้รับยาแก้ปวดของผู้ป่วย 20 ราย [17]

1.1	1.4	1.3	1.7	1.9	1.8	1.6	2.2	1.7
2.7	4.1	1.8	1.5	1.2	1.4	3	1.7	2.3
1.6	2							

ค่าประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจง TLET-Lindley และ LET-Lindley ถูกตรวจสอบประสิทธิภาพด้วยค่า –LL เกณฑ์ข้อสนเทศของอะกะอิเกะ (Akaike's Information Criterion) หรือเกณฑ์เอไอซี (AIC) เกณฑ์ข้อสนเทศของเบส์ (Bayesian Information Criterion; BIC) และการทดสอบของโคโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Test; K-S) ดังสมการที่ (18), (19) และ (20) ตามลำดับ

$$AIC = -2\log(L) + 2p \tag{18}$$

$$BIC = -2\log(L) + p\log(n) \tag{19}$$

$$K\text{-}S = \sup_x \left| F_n(x) - F_o(x) \right| \tag{20}$$

เมื่อ n คือ จำนวนตัวอย่าง

p คือ จำนวนพารามิเตอร์

$F_0(x)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงภายใต้สมมติฐานว่าง

$F_n(x)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงเชิงประจักษ์ (Empirical Distribution Function)

การแจกแจงที่เหมาะสมกับข้อมูลดังกล่าว คือการแจกแจงที่ให้ค่า AIC และ BIC ที่มีค่าต่ำ และค่าการทดสอบ K-S ที่มีค่า *p*-value สูง ตารางที่ 2 ตารางที่ 3 และตารางที่ 4 แสดงผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ –LL AIC BIC และค่าการทดสอบ K-S ของข้อมูลจริงทั้ง 3 ชุด ซึ่งผลการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่า การแจกแจง TLET-Lindley มีความสอดคล้องกับข้อมูลมากที่สุด เนื่องจากมีค่า –LL AIC และ BIC (ยกเว้นค่า BIC จากตารางที่ 2) ต่ำที่สุด และค่าการทดสอบ K-S ที่มีค่า *p*-value สูงกว่าวิธี LET-Lindley และ Lindley

4. อภิปรายผลและสรุป

การวิจัยครั้งนี้พัฒนาการแจกแจงลินเลย์พารามิเตอร์เดียวด้วยการแปลงแบบล็อก-เอกซ์โพ หรือเรียกว่า การแจกแจง LET-Lindley และการตัดปลายการแจกแจงดังกล่าว หรือเรียกว่าการแจกแจง TLET-Lindley ซึ่งการแจกแจงทั้ง 2 วิธี ที่พัฒนาขึ้นมีความสอดคล้องกับข้อมูลจริงมากกว่าการแจกแจงต้นกำเนิด ดังจะเห็นได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ ซึ่งจะมีค่าการทดสอบ K-S ที่ให้ค่า *p*-value สูง และค่า –LL AIC และ BIC ต่ำกว่าการแจกแจงลินเลย์

พารามิเตอร์เดียวที่เป็นการแจกแจงต้นกำเนิด เนื่องจากการแจกแจง LET-Lindley มีความยืดหยุ่น และสอดคล้องกับลักษณะการแจกแจงของข้อมูลชั่วชีวิตมากกว่า อีกทั้งการตัดปลายการแจกแจง LET-Lindley หรือ TLET-Lindley ทำให้การแจกแจงที่พัฒนาขึ้นมามีความสอดคล้องใกล้เคียงกับข้อมูลจริงมากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบการแจกแจงต้นกำเนิดและ LET-Lindley

5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้ได้รับทุนอุดหนุนวิจัย ประเภททุนนักวิจัยรุ่นใหม่ ประเภทงบประมาณกองทุนส่งเสริมงานวิจัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ประจำปีงบประมาณ 2564 สัญญาเลขที่ NRF64D0604

เอกสารอ้างอิง

[1] R. Shanker, F. Hagos, and S. Sujatha, "On modeling of lifetimes data using exponential and Lindley distributions," *Biometrics & Biostatistics International Journal*, vol. 2, no. 5, pp. 1–9, 2015.

[2] R. Shanker, "Akash distribution and its applications," *International Journal of Probability and Statistics*, vol. 4, no. 3, pp. 65–75, 2015.

[3] R. Shanker, "Shanker distribution and its applications," *International Journal of Statistics and Applications*, vol. 5, no. 6, pp. 338–348, 2015.

[4] D. V. Lindley, "Fiducial distributions and Bayes' theorem," *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 20, no. 1, pp. 102–107, 1958.

[5] R. Shanker and A. Mishra, "A quasi Lindley distribution," *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, vol. 6, no. 4, pp. 64–71, 2013.

[6] R. Shanker and A. Mishra, "A two parameter Lindley distribution," *Statistics in Transition New Series*, vol. 14, no. 1, pp. 45–56, 2013.

[7] R. Shanker, S. Sharma, and R. Shanker, "A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data," *Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 363–368, 2013.

[8] S. K. Singh, U. Singh, and V. K. Sharma, "The truncated Lindley distribution: Inference and application," *Journal of Statistics Applications & Probability*, vol. 3, no. 2, pp. 219–228, 2014.

[9] S. Aryuyuen, "Truncated two- parameter Lindley distribution and its application," *The Journal of Applied Science*, vol. 17, no. 1, pp. 19–32, 2018.

[10] M. Aslam, C. Ley, Z. Hussain, S. F. Shah, and Z. Asghar. "A new generator for proposing flexible lifetime distributions and its properties," *PLoS ONE*, vol. 15, no. 4, 2020.

[11] A. C. Johnson, "On the truncated normal distribution: Characteristics of singly-and doubly-truncated populations of application in management science," Ph.D. thesis, Stuart Graduate School of Business, IIOT, Illinois, USA, 2001.

[12] P. M. Hannon and R. C. Dahiya, "Estimation of parameters for the truncated exponential distribution," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 28, no. 11, pp. 2591–2612, 1999.

[13] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*, vol. 1, 2nd ed. New York: Wiley-Inter science, 1994.

[14] S. Aryuyuen and W. Bodhisuwan, "The truncated power lomax distribution: Properties and applications," *Walailak Journal of Science*

and Technology, vol. 16, no. 9, pp. 655–668, 2019 (in Thai).

[15] M. G. Bader and A. M. Priest, “Statistical aspects of fiber and bundle strength in hybrid composites,” in *Hayashi T, editor, Progress in Science in Engineering Composites*. Tokyo, ICCM-IV, 1982, pp. 1129–1136.

[16] D. K. Bhaumik, K. Kapur, and R. D. Gibbons, “Testing parameters of a gamma distribution for small samples,” *Technometrics*, vol. 51, no. 3, pp. 326–334, 2009.

[17] A. J. Gross and V. A. Clark, *Survival Distributions: Reliability Applications in the Biometrical Sciences*. New York: John Wiley, 1975.