ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นและการประยุกต์

นิฟาตมะห์ มะกาเจ
อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
อาทิตย์ อินทรสิทธิ์*
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0-7331-2179 อีเมล: arthit.i@psu.ac.th
รับเมื่อ 7 ตุลาคม 2557 ตอบรับเมื่อ 12 พฤษภาคม 2558 เผยแพร่ออนไลน์ 21 กรกฎาคม 2558
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2015.05.002

บทคัดย่อ

ในบทความวิชาการฉบับนี้ได้อภิปรายถึงปัญหาคลาสสิกที่น่าสนใจ 3 ปัญหาในทฤษฎีกราฟ ได้แก่ ปัญหาการจับมือทักทายในงานเลี้ยง ปัญหาการเดินข้ามสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก และปัญหาการหาวงแฮมิลตันและรอยเดินออยเลอร์ในกราฟ การหาคำตอบของทั้งสามปัญหาอาศัยทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกราฟออยเลอร์และกราฟแฮมิลตัน การแก้ปัญหาแรกก่อให้เกิดทฤษฎีบทแรกในทฤษฎีกราฟ ซึ่งรู้จักในอีกชื่อหนึ่งว่า บทตั้งการจับมือ (Handshaking Lemma)

คำสำคัญ: ทฤษฎีกราฟ กราฟออยเลอร์ กราฟแฮมิลตัน

การอ้างอิงบทความ: นิฟาตมะห์ มะกาเจ และ อาทิตย์ อินทรสิทธิ์, "ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นและการประยุกต์," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 25, ฉบับที่ 3, หน้า 505–516, ก.ย.–ธ.ค. 2558. http://dx.doi.org/10.14416/j.kmutnb.2015.05.002

Basic Graph Theory and Its Applications

Nifatamah Makaje
Lecturer, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science and Technology, Prince of Songkla University, Pattani Campus, Pattani, Thailand

Arthit Intarasit*
Associate Professor, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science and Technology, Prince of Songkla University, Pattani Campus, Pattani, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0-7331-2179, E-mail: arthit.i@psu.ac.th
Received 7 October 2014; Accepted 12 May 2015; Published online: 21 July 2015
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2015.05.002

Abstract

In this paper, we discuss three interesting classic problems in graph theory: the Handshake problem, the Königsberg Bridge problem and the problem of finding Hamiltonian cycles and Euler trails. The solutions for the first three problems are obtained by applying theories related to Eulerian and Hamilto-nian Graphs. The first problem solving provided the first theory in graph theory known as Handshaking Lemma.

Keywords: Graph Theory, Eulerian Graphs, Hamil-tonian Graphs

Please cite this article as: N. Makaje and A. Intarasit, "Basic Graph Theory and Its Applications," *J. KMUTNB*, Vol. 25, No. 3, pp. 505–516, Sep.–Dec. 2015 (in Thai). http://dx.doi.org/10.14416/j.kmutnb.2015.05.002

1. บทนำ

ในการแก้โจทย์ปัญหาหรือเกมปริศนาบางข้อสามารถทำได้โดยง่ายด้วยการอธิบายปัญหานั้นด้วยแผนภาพตัวแทน ซึ่งเรียกว่า *กราฟ* (Graph) ที่เป็นแผนภาพที่ประกอบด้วย*จุดยอด* (Vertex) ที่วาดแทนด้วย จุดทึบ และ*เส้นเชื่อม* (Edge) ที่เชื่อมโยงบางจุดยอด

ในทางคณิตศาสตร์ไม่ได้มองกราฟเพียงแต่เป็นแผนภาพเท่านั้น แต่ได้นิยามกราฟอย่างมีรูปแบบชัดเจน Clark และ Holton [1] ได้ให้นิยามกราฟดังนี้ กราฟ $G = (V, E)$ ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต ได้แก่ 1) เซตของจุดยอด V ที่ไม่เป็นเซตว่างและเรียกสมาชิกใน V ว่า จุดยอด 2) เซตของเส้นเชื่อม E ที่อาจเป็นเซตว่างได้และเรียกสมาชิกใน E ว่า เส้นเชื่อม แต่ละเส้นเชื่อม e ใน E ถูกกำหนดด้วยคู่ไม่อันดับ (Unordered Pair) ของจุดยอด (u,v) ซึ่งเรียกว่า จุดยอดปลาย (End Vertex) ของ e ทั้งนี้อาจแทนด้วย $V(G)$ และ $E(G)$ เพื่อเน้นว่าเป็นเซตของจุดยอดและเซตของเส้นเชื่อมของกราฟ G

กราฟต่อไปเป็นตัวแทนของการเชื่อมโยงเครือข่ายโทรคมนาคมในเมืองๆ หนึ่ง โดยมีจุดยอดแทนศูนย์โทรคมนาคมและเส้นเชื่อมแทนสายเคเบิลเชื่อมระหว่างศูนย์ต่างๆ

กราฟ $G = (V, E)$ ในรูปที่ 1 อธิบายในเชิงคณิตศาสตร์ โดยมี

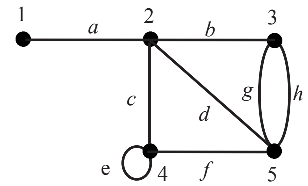
$$V = \{1,2,3,4,5\} \text{ และ } V = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

และมีจุดยอดปลายในแต่ละเส้นเชื่อมเป็นดังนี้

$$a \leftrightarrow (1,2),\ b \leftrightarrow (2,3),\ c \leftrightarrow (2,4),\ d \leftrightarrow (2,5)$$
$$e \leftrightarrow (4,4),\ f \leftrightarrow (4,5),\ g \leftrightarrow (3,5) \text{ และ } h \leftrightarrow (3,5)$$

ถ้าเส้นเชื่อม e มี u และ v เป็นจุดยอดปลาย แล้วจะกล่าวว่า e เชื่อม (Joint) u และ v

ถ้าจุดยอด u เชื่อมเข้ากับ u ด้วยเส้นเชื่อม e แล้วจะกล่าวว่า e เป็นเส้นเชื่อมวงวน (Loop)



รูปที่ 1 กราฟตัวแทนของการเชื่อมโยงเครือข่ายโทรคมนาคมในเมืองๆ หนึ่ง

ถ้ามีเส้นเชื่อมในกราฟ G จำนวนสองเส้นเชื่อมหรือมากกว่าที่มีจุดยอดปลายเหมือนกัน แล้วจะกล่าวว่าเส้นเชื่อมเหล่านั้นว่า ขนานกัน (Parallel)

กราฟที่ไม่มีทั้งเส้นเชื่อมวงวนและขนานกันเป็นกราฟที่มีลักษณะเฉพาะและไม่ซับซ้อน ซึ่งจะมีชื่อเรียกเฉพาะตามลักษณะความไม่ซับซ้อนของกราฟนี้ ตามนิยามต่อไปนี้ ถ้า G เป็นกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมวงวนและขนานกัน แล้วจะเรียก G ว่าเป็น กราฟเชิงเดียว (Simple Graphs)

1.1 แนวเดินในกราฟ

แนวเดิน (Walk) ในกราฟคือ ลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อม ซึ่งเริ่มต้นและสิ้นสุดด้วยจุดยอด ถ้า W แทนแนวเดินแล้วจะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k\text{-}1} e_k v_k$$

โดยที่ e_i แทนเส้นเชื่อมที่มี $v_{i\text{-}1}$ และ v_i แทนจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม e_i เมื่อ $1 \leq i \leq k$

แนวเดิน W อาจถูกเรียกว่า แนวเดิน $v_0 - v_k$ หรือแนวเดินจาก v_0 ถึง v_k ทั้งนี้ จุดยอด v_0 เป็น จุดกำเนิด (Origin) ของ W และ จุดยอด v_k เป็น *จุดสิ้นสุด* (Terminus) ของ W

v_0 และ v_k ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน ถ้า $v_0 \neq v_k$ เรียก W ว่า *แนวเดินเปิด* (Open Walk) และจะเรียก W ว่า แนวเดินปิด (Closed Walk) ถ้า $v_0 = v_k$

จุดยอด $v_1 \ldots v_{k\text{-}1}$ ใน W เรียกว่า *จุดยอดภายใน* (Internal Vertices)

ความยาวของ W คือ จำนวนเส้นเชื่อมใน W

แนวเดินชัด (Trivial Walk) เป็นแนวเดินที่ไม่บรรจุเส้นเชื่อม

กำหนดให้ $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ เป็นแนวเดิน ถ้าทุกเส้นเชื่อม $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ใน W แตกต่างกัน แล้วแนวเดินนั้นเป็นรอยเดิน (Trail) และในการเขียนลำดับของแนวเดินจะสามารถละเส้นเชื่อมได้ถ้าในกราฟไม่มีเส้นเชื่อมวงวนหรือเส้นเชื่อมขนาน

ถ้าทุกจุดยอด $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ในแนวเดิน W แตกต่างกัน แล้วจะเรียกแนวเดินนั้นว่า *วิถี* (Path)

ในหัวข้อถัดไปจะได้ให้ชื่อรอยเดินที่มีลักษณะเฉพาะในกราฟ G

1.2 วงหรือวิถีปิดในกราฟ

รอยเดินปิดไม่ชัด (Nontrivial Closed Trail) ในกราฟ G ถูกเรียกว่า วง (Cycle) ถ้าจุดกำเนิดและจุดภายในแตกต่างกัน กล่าวได้ว่า รอยเดินปิด $C = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ เป็นวง ถ้า C มีอย่างน้อย 1 เส้นเชื่อมโดยที่ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ซึ่งเป็นจุดยอดที่แตกต่างกัน n จุดยอด

วงที่มีความยาว k หมายถึง วงที่มี k เส้นเชื่อม เรียกวงนั้นว่า วง k

วง k เป็นคู่หรือคี่ ขึ้นกับว่า k เป็นคู่หรือคี่

วง 3 มักเรียกกันว่า สามเหลี่ยม

จะกล่าวว่า เส้นเชื่อม e ในกราฟ G *กระทบ* (Incident) จุดยอด v ถ้า v เป็นยอดปลายของ e

เส้นเชื่อมใดๆ ในกราฟกระทบจุดยอด 1 จุดหรือ 2 จุด วงวนในกราฟจึงหมายถึง เส้นเชื่อมกระทบบนจุดยอดเพียง 1 จุด อย่างไรก็ตาม จุดใดๆ ในกราฟอาจไม่กระทบกับเส้นเชื่อม หรือกระทบกับเส้นเชื่อมเป็นจำนวนจำกัดก็ได้

ถ้าเส้นเชื่อม e และ f กระทบจุดยอด v เดียวกัน จะกล่าวว่า e และ f เป็นเส้น*เชื่อมประชิด* (Adjacent) กัน

ระดับขั้น (Degree) ของจุดยอด v ในกราฟ G ซึ่งแทนด้วย $d(e)$ หรือ $d_G(e)$ (เมื่อต้องการเน้นว่าเป็นระดับขั้นของจุดยอด v ในกราฟ G) คือ จำนวนของเส้นเชื่อมใน G ที่กระทบบน v โดยนับแต่ละวงวนเป็นจำนวน 2 ครั้ง

ในเกมปริศนาหรือปัญหาที่ซับซ้อนจำนวนมากจะสามารถวิเคราะห์หาคำตอบได้ด้วยความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ ในบทความวิชาการฉบับนี้จะได้อภิปรายนำเสนอปัญหาที่น่าสนใจ 3 ปัญหา ดังนี้

1. ปัญหาการจับมือทักทายในงานเลี้ยง
2. ปัญหาการเดินข้ามสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก
3. ปัญหาการหาวงแฮมิลตันและรอยเดินออยเลอร์ในกราฟ

ทั้งสามปัญหานี้ก่อให้เกิดกราฟที่มีลักษณะเฉพาะ คือ กราฟออยเลอร์และกราฟแฮมิลตัน ซึ่งรู้จักกันเป็นอย่างดีในเวลาต่อมา โครงสร้างของกราฟทั้งสองนี้มีสมบัติที่บริบูรณ์เพียบพร้อม จึงมักใช้กันอย่างแพร่หลายในงานวิจัยและการประยุกต์ต่างๆ

2. ปัญหาการจับมือทักทายในงานเลี้ยง

ในงานเลี้ยงสังสรรค์งานหนึ่ง ถ้าผู้เข้าร่วมงานเลี้ยงแต่ละคนสามารถจับมือเพื่อทักทายหรือลาจากผู้ร่วมงานคนอื่นๆ ซึ่งอาจจับมือทักทายได้มากกว่าหนึ่งครั้งหรืออาจไม่จับมือทักทายผู้เข้าร่วมงานคนใดเลยก็ได้ เมื่องานเลี้ยงสิ้นสุดพบว่า จะสามารถแบ่งกลุ่มผู้ร่วมงานได้ 2 กลุ่ม คือ

(ก) กลุ่มผู้ร่วมงานที่จับมือทักทายเป็นจำนวนคู่ครั้ง

(ข) กลุ่มผู้ร่วมงานที่จับมือทักทายเป็นจำนวนคี่ครั้ง

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนครั้งรวมในการจับมือทักทายกันของผู้ร่วมงานเลี้ยงแต่ละคนในกลุ่ม (ก) และ (ข) และจำนวนครั้งในการจับมือทักทายกันของผู้ร่วมงานเลี้ยงคู่ใดๆ แล้วจะสามารถหาข้อสรุปอะไรได้บ้างจากความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้

เราทราบแล้วว่า ระดับขั้นของจุดยอดคือ จำนวนเส้นเชื่อมที่กระทบจุดยอดนั้น แต่เนื่องจาก 1 เส้นเชื่อมใดๆ จะกระทบ 2 จุดยอดเสมอ ดังนั้นจำนวนเส้นเชื่อม ซึ่งคือจำนวนรวมของระดับขั้นของจุดยอดต้องมีเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมเสมอ ซึ่งเป็นจริงตามบทตั้งดังต่อไปนี้

บทตั้งที่ 2.1 บทตั้งแรกของทฤษฎีกราฟ [1]

สำหรับกราฟ G ที่มีเส้นเชื่อมเป็นจำนวนเส้นเชื่อม e เส้นและมีจุดยอด n จุด คือ $v_1, \ldots, v_n$ แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

จุดยอดคู่ หมายถึง จุดยอดที่มีระดับขั้นเป็นจำนวนคู่ และจุดยอดคี่ หมายถึง จุดยอดที่มีระดับขั้นเป็นจำนวนคี่

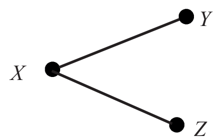
เมื่อแทนเส้นเชื่อมด้วยการจับมือและจุดยอดแทนคนในงานเลี้ยงสังสรรค์ ดังรูปที่ 2 โดยบทตั้งที่ 2.1 กล่าวได้ว่าต้องมีจำนวนครั้งรวมในการจับมือของแต่ละคนในงานเลี้ยงเป็นสองเท่าของจำนวนครั้งในการจับมือทักทายกันของผู้ร่วมงานเลี้ยงคู่ใดๆ ในรูปที่ 2 จำนวนครั้งรวมในการจับมือของแต่ละคนในงานเลี้ยงเท่ากับ 4 ครั้ง ส่วนจำนวนครั้งในการจับมือของผู้ร่วม งานเลี้ยงคู่ใดๆ เท่ากับ 2 ครั้ง ซึ่งสอดคล้องกับบทตั้งที่ 2.1

เพื่อให้ง่ายแก่ความเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างการจับมือทักทายและจำนวนคนร่วมงาน ขอให้พิจารณาแผนผังในรูปที่ 3 โดยกำหนดให้ A และ B แทนจำนวนคนในงานเลี้ยงในกลุ่ม (ก) และ (ข) ตามลำดับ ขอให้พิจารณากลุ่ม (ก) ซึ่งหมายถึง กลุ่มผู้ร่วมงานแต่ละคนที่จับมือทักทายเป็นจำนวนคู่ครั้งก่อน เนื่องจากผลคูณของจำนวนคู่กับจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ย่อมเป็นจำนวนคู่เสมอ ดังนั้นไม่ว่ากลุ่ม (ก) จะมีคนเป็นจำนวนคู่หรือคี่ก็ตาม จำนวนครั้งรวมในการจับมือต้องเป็นจำนวนคู่เสมอ ซึ่งแทนด้วย α ดังนั้น α เป็นจำนวนคู่ และกล่าวได้ว่า A เป็นจำนวนคู่หรือคี่ก็ได้ จึงทำให้จำนวนครั้งรวมที่เหลือในการจับมือของแต่ละคนในงานเลี้ยงเป็นจำนวนคู่ ซึ่งแทนด้วย β เนื่องจากคนร่วมงานเลี้ยงในกลุ่ม (ข) แต่ละคนมีจำนวนครั้งในการจับมือเป็นจำนวนคี่ จำนวน β จะเป็นจำนวนคู่ได้ก็ต่อเมื่อ B เป็นจำนวนคู่เท่านั้น

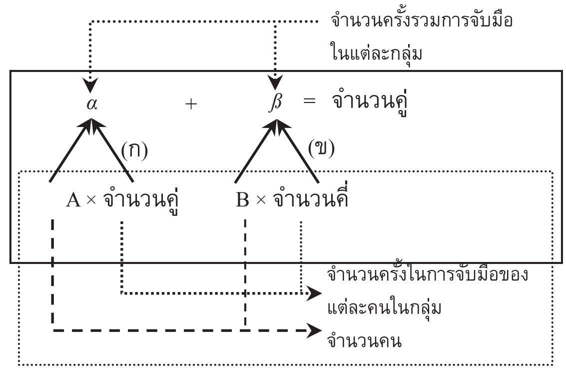
ข้อสรุปในความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นดังนี้ จำนวนผู้ร่วมงานที่แต่ละคนจับมือทักทายเป็นจำนวนคู่มีอยู่เป็นจำนวนคู่หรือเป็นจำนวนคี่ก็ได้ ส่วนจำนวนผู้ร่วมงานที่แต่ละคนจับมือทักทายเป็นจำนวนคี่จะมีอยู่เป็นจำนวนคู่เสมอ

จากตัวอย่างที่กล่าวมานี้ บทตั้งที่ 2.1 จึงรู้จักในชื่อว่า *บทตั้งการจับมือ* (Handshaking Lemma)

บทแทรกต่อไปนี้ จะสามารถสรุปความสัมพันธ์ของจำนวนผู้ร่วมงานกับการจับมือเป็นจำนวนคี่ครั้ง เมื่อให้



รูปที่ 2 กราฟตัวแทนการจับมือทักทายในงานเลี้ยง



รูปที่ 3 แผนผังแสดงจำนวนการจับมือและจำนวนคน

จุดยอดแทนผู้ร่วมงานและระดับขั้นแทนจำนวนครั้งในการจับมือของแต่ละคน ได้ดังนี้

บทแทรกที่ 2.2 สำหรับกราฟใดๆ จำนวนจุดยอดที่มีระดับขั้นเป็นจำนวนคี่มีอยู่เป็นจำนวนคู่

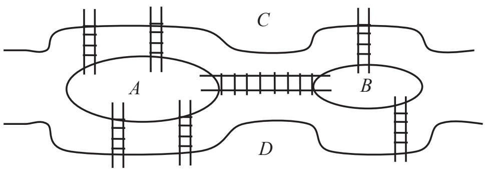
3. ปัญหาการเดินข้ามสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก

ปัญหาการเดินข้ามสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์กเป็นตัวอย่างของปัญหาเชิงปฏิบัติที่เป็นรูปธรรมและเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นมานานแล้ว

ก่อนอื่นจะได้ให้บทนิยามที่เกี่ยวข้องเพิ่มเติม ดังนี้ เราทราบแล้วว่า รอยเดินในกราฟ G คือ แนวเดินที่ผ่านเส้นเชื่อมที่แตกต่างกันใน G กล่าวคือ ไม่มีเส้นเชื่อมใน G ที่ปรากฏในรอยเดินมากกว่า 1 ครั้ง

รอยเดินใดๆ ใน G อาจไม่ปรากฏทุกเส้นเชื่อมใน G ก็ได้ แต่ถ้าทุกเส้นเชื่อมปรากฏอยู่ในรอยเดินๆ นั้นจะมีชื่อเรียกเฉพาะ ดังนี้

รอยเดินใน G เรียกว่า *รอยเดินออยเลอร์* (Euler Trail) ถ้ารอยเดินนั้นมีทุกเส้นเชื่อมใน G



รูปที่ 4 แผนที่ของเมืองเคอนิกส์แบร์ก

กล่าวได้ว่า รอยเดิน เป็นรอยเดินออยเลอร์ ถ้าทุกเส้นเชื่อมใน G ปรากฏอยู่ในรอยเดินนั้นเพียง 1 ครั้งเท่านั้น

ทัวร์ (Tour) ของ G คือ แนวเดินปิดของ G ที่บรรจุทุกเส้นเชื่อมของ G ที่ปรากฏอย่างน้อย 1 ครั้งเท่านั้น (ซ้ำเส้นเชื่อมเดิมหรือไม่ซ้ำก็ได้)

ทัวร์ออยเลอร์ (Euler Tour) ของ G คือ ทัวร์ที่บรรจุแต่ละเส้นเชื่อม G เพียง 1 ครั้งเท่านั้น

กราฟและทฤษฎีกราฟเริ่มต้นในต้นคริสต์ศตรรษที่ 18 เมื่อเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์ได้แก้ปัญหาการเดินผ่านสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก (Königsberg) ซึ่งเป็นเมืองหลวงในปรัสเซีย (Prussian) โดยข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียง 1 ครั้งเท่านั้น ปัจจุบันได้เปลี่ยนชื่อเมืองเป็น Kaliningrad ซึ่งอยู่สหพันธรัฐรัสเซียในปัจจุบัน

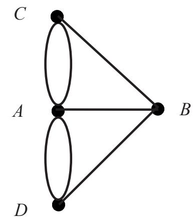
แผนภาพที่ไม่ซับซ้อนของปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก แสดงดังรูปที่ 4

ในรูปที่ 4 A และ B แทนเกาะกลางแม่น้ำพรีเกิล (Pregel) ในปัจจุบันมีชื่อว่า Pregolya ทั้งสองเกาะเชื่อมระหว่างพื้นดิน C และ D ด้วยสะพานทั้ง 7 สะพาน

ปัญหาที่น่าสนใจคือ ต้องการหาเส้นทาง (Route) ที่ชาวเมืองเคอนิกส์แบร์กเริ่มต้นเดินจากพื้นดินใดพื้นดินหนึ่งใน 4 แห่ง A, B, C และ D แล้วเดินข้ามสะพานทั้ง 7 สะพาน โดยเดินผ่านสะพานแต่ละแห่งได้เพียง 1 ครั้งเท่านั้นและต้องกลับไปยังจุดเริ่มต้น

ออยเลอร์แก้ปัญญาดังกล่าวนี้ โดยได้แปลงรูปที่ 4 ให้อยู่ในรูปของกราฟโดยให้พื้นดินทั้ง 4 แห่งแทนด้วย 4 จุดยอด และให้สะพานทั้ง 7 สะพานแทนด้วยเส้นเชื่อม 7 เส้น ดังรูปที่ 5

ในปี ค.ศ. 1736 ออยเลอร์ [3] ได้แก้ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก โดยพิจารณากราฟ $G_{Königsberg}$ ในรูปที่ 5 เขาได้แสดงว่า กราฟ $G_{Königsberg}$ ไม่มีรอยเดินออยเลอร์ กล่าวคือ เป็นไปไม่ได้ที่จะมีเส้นทางที่จะเดินผ่านสะพานแต่ละแห่งได้เพียง 1 ครั้งเท่านั้นโดยต้องกลับไปยังจุดเริ่มต้น



รูปที่ 5 กราฟ $G_{Königsberg}$ ตัวแทนของแผนที่เมืองเคอนิกส์แบร์กในรูปที่ 4

ในการแก้ปัญหานี้ก่อให้เกิดกราฟที่มีลักษณะเฉพาะขึ้นซึ่งเรียกว่า กราฟออยเลอร์ โดยออยเลอร์ได้พิสูจน์ว่า กราฟเชื่อมโยง G เป็นกราฟออยเลอร์ ถ้าระดับขั้นของแต่ละจุดยอดเป็นจำนวนคู่ ในที่นี้ กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง ถ้าทุกสองจุดยอดใดๆ ใน G มีทางเดินเชื่อมโยงกัน แต่ทุกสองจุดยอดใดๆ ใน G ไม่เชื่อมโยงกัน จะเรียกว่า กราฟไม่เชื่อมโยง

ข้อพิสูจน์ของออยเลอร์ข้างต้นนี้เป็นเงื่อนไขเพียงพอ (Sufficient Condition) ต่อมาใน ค.ศ. 1873 Hierholzer ได้พิสูจน์ส่วนเงื่อนไขจำเป็น (Necessary Condition) ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นข้อสรุปลักษณะ เฉพาะของกราฟออยเลอร์

ทฤษฎีบทที่ 3.1 กราฟ (มีอย่างน้อย 2 จุด) จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ กราฟนั้นเป็นกราฟเชื่อมโยง และจุดยอดทุกจุดเป็นจุดยอดคู่

เมื่อมองย้อนกลับไปในปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก สังเกตว่าทุกจุดยอดกราฟ $G_{Königsberg}$ ในรูปที่ 5 ไม่มีระดับขั้นเป็นคู่เลย ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.1 ได้ว่า $G_{Königsberg}$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ กล่าวคือ ไม่มีแนวเดินปิดใน $G_{Königsberg}$ ที่เชื่อมทุกจุดยอดใน $G_{Königsberg}$ นั่นคือ เป็นไปไม่ได้ที่จะเดินผ่านสะพานทั้ง 7 แห่ง โดยเดินผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวและย้อนกลับไป ณ จุดเริ่มต้นได้

นอกจากนี้กราฟออยเลอร์ยังมีลักษณะเฉพาะอีกหนึ่งประการที่สำคัญ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.2 กราฟเชื่อมโยง G เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ ถ้า G มีวง $G_{(1)},\ldots,G_{(n)}$ โดยที่ทุกเส้นเชื่อมของ $G_{(1)}$ อยู่ใน $G_{(i)}$ วงใดวงหนึ่งเพียงวงเดียว

ในทฤษฎีบทนี้ กล่าวได้ว่า กราฟเชื่อมโยง G เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ G เป็นยูเนียนของวงที่ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน

นิยามของยูเนียนของวง จะสามารถปรับเปลี่ยนได้จากยูเนียนของกราฟ ตามนิยามต่อไปนี้

กำหนดให้ $G(V,E)$ และ $H(U,E)$ เป็นกราฟโดยที่ $V \cap U \neq \phi$ ยูเนียนของ G และ H แทนด้วยสัญลักษณ์ $G \cup H$ หมายถึง กราฟที่มีเซตของจุดยอด $V \cup U$ และเซตของเส้นเชื่อม $E \cup F$

นอกจากนี้จะกล่าวว่า G และ H *ไม่มีส่วนร่วมกัน* (Disjoint) ถ้ากราฟทั้งสองไม่มีจุดยอดร่วมกัน และจะกล่าวว่า G และ H *ไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน* (Edge Disjoint) ถ้ากราฟทั้งสองไม่มีเส้นเชื่อมร่วมกัน

กราฟที่ไม่มีจุดยอดคี่เลย หรือมีจุดยอดคี่อย่างมากเพียง 2 จุดยอดเท่านั้นเป็นกราฟที่มีรอยเดินออยเลอร์ ลักษณะเฉพาะดังกล่าวนี้เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

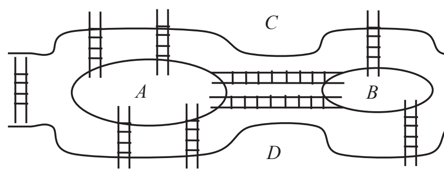
ทฤษฎีบทที่ 3.3 กราฟเชื่อมโยง G จะมีรอยเดินออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ G มีจุดยอดคี่อย่างมากสองจุดยอดเท่านั้น

เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่ 3.3 ในปัญหาของสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก ได้ว่า

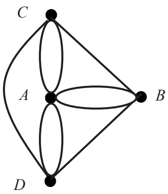
เพราะว่าจุดยอดทั้ง 4 ใน $G_{Königsberg}$ มีระดับขั้นเป็นจำนวนคี่ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3.3 ได้ว่า $G_{Königsberg}$ ไม่มีรอยเดินออยเลอร์

อย่างไรก็ตามเมื่อเพิ่มสะพาน 2 สะพานเข้าไปในแผนที่ของเมืองเคอนิกส์แบร์ก โดยสะพานแรกเชื่อมระหว่างพื้นดิน C และ D อีกสะพานเชื่อมระหว่างเกาะ A และ B ดังรูปที่ 6 ซึ่งมี $G'_{Königsberg}$ เป็นกราฟตัวแทนดังรูปที่ 7

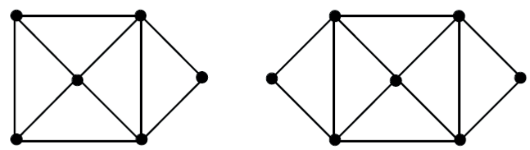
ทุกจุดยอดใน $G'_{Königsberg}$ มีระดับขั้นเป็นจำนวนคู่ โดยทฤษฎีบทที่ 3.1 ได้ว่า $G'_{Königsberg}$ เป็นกราฟออยเลอร์ กล่าวได้ว่า มีเส้นทางที่จะเดินผ่านสะพานทั้ง 9 สะพาน



รูปที่ 6 แผนที่ของเมืองเคอนิกส์แบร์กที่เพิ่มสะพาน



รูปที่ 7 กราฟ $G'_{Königsberg}$ ตัวแทนของแผนที่เมืองเคอนิกส์แบร์กในรูปที่ 6

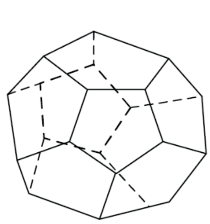


(ก) (ข)

รูปที่ 8 ตัวอย่างกราฟที่มีรอยเดินออยเลอร์ (ก) และกราฟที่มีทัวร์ออยเลอร์ (ข)

โดยผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวและย้อนกลับไป ณ จุดเริ่มต้นได้

กราฟที่มีรอยเดินออยเลอร์มักพบอยู่ในหนังสือเกมฝึกสมองประลองปัญญาของเด็กๆ ซึ่งมักให้หารอยเดินในแผนภาพที่กำหนดโดยให้ลากผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นเพียงครั้งเดียว นอกจากนี้จะต้องลากเส้นเชื่อมเพื่อสร้างรอยเดินอย่างต่อเนื่องไม่ยกดินสอ รอยเดินที่ต้องการหานี้คือรอยเดินออยเลอร์นั่นเอง ขอให้พิจารณากราฟในรูปที่ 8 ต่อไปนี้ ในรูปที่ 8 (ก) มีจุดยอดคี่เพียงสองจุด ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3.3 ได้ว่า กราฟในรูปที่ 8 (ก) มีรอยเดินออยเลอร์ กล่าวคือ สามารถหารอยเดินที่ปรากฏแต่ละเส้นเชื่อมเพียง 1 ครั้งเท่านั้นได้โดยไม่ยกดินสอได้ ผู้อ่านสามารถทดลองหารอยเดินออยเลอร์ในรูปที่ 8 (ก) ได้โดยง่าย ส่วนกราฟในรูปที่ 8 (ข) นั้น เนื่องจากทุกจุดยอดเป็นจุดยอดคู่ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3 จึงสามารถ



รูปที่ 9 รูปทรงสิบสองหน้า

หาทัวร์ออยเลอร์อย่างแน่นอน กล่าวคือ จะสามารถหารอยเดินปิดที่ปรากฏแต่ละเส้นเชื่อมเพียงครั้งเดียวได้โดยไม่ยกดินสอได้

ทัวร์ออยเลอร์เป็นรอยเดินปิดที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟเพียงครั้งเดียว สำหรับการพิจารณาว่ากราฟแบบใดที่จะสามารถเคลื่อนที่ตามเส้นเชื่อมภายในกราฟโดยผ่านจุดยอดทุกจุดยอดเพียงครั้งเดียวนั้นเป็นปัญหาที่มีการศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ชื่อ เซอร์วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน (Sir William Rowan Hamilton) ซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

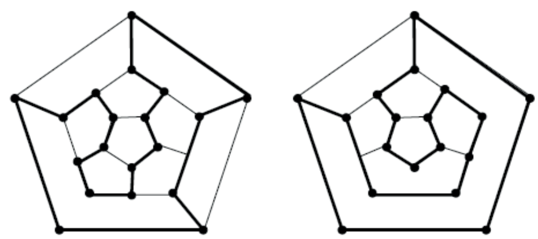
ผู้อ่านที่สนใจจะศึกษาการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.1, 3.2 และ 3.3 ได้จากหนังสือ Clark และ Holton [1]

4. กราฟแฮมิลตัน

วงแฮมิลตัน (Hamiltonian Cycle) ในกราฟ G คือวงที่บรรจุทุกจุดยอดในกราฟ G เรียกกราฟ G ว่ากราฟแฮมิลตัน ถ้ากราฟนั้นบรรจุวงแฮมิลตัน

กราฟแฮมิลตัน ตั้งตามชื่อของ เซอร์วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน ซึ่งได้คิดค้นเกมปริศนา Icosian ขึ้นมา แล้วจึงขายให้ผู้ผลิตเกมในประเทศ Dublin ในราคา 25 เหรียญอังกฤษ (Guineas) เกมนี้เป็นเกมที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงสิบสองหน้า (Dodecahedron) ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 9 ซึ่งมีจุดยอดจำนวน 20 จุดยอด ซึ่งแต่ละจุดยอดแทนเมืองหลวงของ 20 ประเทศ และเส้นเชื่อมหมายถึงเส้นทางคมนาคมที่เชื่อมระหว่างเมืองหลวงเหล่านั้น

จุดมุ่งหมายของเกมคือต้องการหาทัวร์ไปบนเส้นเชื่อมที่ผ่านทุกเมืองเพียงครั้งเดียว โดยเริ่มต้นและสิ้นสุด ณ เมืองเดียวกัน กล่าวคือ ต้องการหาวงแฮมิลตันในกราฟ



(ก) (ข)

รูปที่ 10 กราฟตัวแทนของรูปทรงสิบสองหน้าในรูปที่ 9 และตัวอย่างวงแฮมิลตัน

รูปทรงสิบสองหน้า กราฟตัวแทนของรูปทรงสิบสองหน้าดังกล่าวนี้แสดงดังรูปที่ 10 นอกจากนี้ในรูปที่ 10 ได้แสดงตัวอย่างวงแฮมิลตัน (เส้นทึบ) ในกราฟตัวแทนรูปทรงสิบสองหน้าอีกด้วย

ก่อนหน้านี้ได้ให้บทนิยามเส้นเชื่อมที่ขนานกันและกราฟเชิงเดียวไปแล้ว ขอให้ผู้อ่านได้ลองทบทวนอีกครั้งหนึ่ง ถ้า C_n เป็นวงที่มี n จุดยอดและมี n เส้นเชื่อม จะเรียกกราฟที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า วง n (n-cycle) ขอให้ผู้อ่านลองยกตัวอย่าง วง n เมื่อ n เป็นจำนวนน้อยๆ ทั้งนี้จะเห็นได้ชัดว่า C_n เป็นกราฟแฮมิลตันสำหรับทุกค่า $n \geq 3$

ปัจจุบันยังไม่มีทฤษฎีบทใดเลยที่บอกถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการเป็นกราฟแฮมิลตัน สำหรับกราฟเชิงเดียวที่มีเงื่อนไขบางประการตามทฤษฎีบทต่อไปนี้จะสามารถตรวจสอบได้ว่าเป็นกราฟแฮมิลตัน Dirac [2]

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ถ้า G เป็นกราฟเชิงเดียวที่มี n จุดยอด โดยที่ $n \geq 3$ และแต่ละจุดยอด v มีระดับขั้น $d(v) \geq n/2$ แล้ว G เป็นกราฟแฮมิลตัน

ขอให้สังเกตว่า จากทฤษฎีบทที่ 4.1 จะต้องหาระดับขั้นของทุกจุดยอด v ในกราฟ G แต่กราฟบางกราฟซึ่งเป็นกราฟที่ซับซ้อนจะตรวจสอบได้ยาก

5. ปัญหาการตรวจสอบกราฟแฮมิลตัน

ในหัวข้อนี้มีจุดประสงค์ที่สำคัญ 3 ประการ ดังนี้

1. นำเสนอตัวอย่างการตรวจสอบการเป็นกราฟ

แฮมิลตัล ที่ไม่สามารถตรวจสอบโดยทฤษฎีบทของ Dirac แต่สามารถตรวจสอบได้โดยวิธีการของ Lynch ซึ่งเนื้อหาในตอนต้นเป็นการทบทวนเนื้อหาบางส่วนในบทความ [4]

2. ในบทความนี้ได้นำเสนอวิธีการคำนวณหาผลรวมของเส้นเชื่อมของกราฟ G_n ซึ่งเป็นวิธีที่แตกต่างจากการคำนวณที่ Lynch [4] ได้นำเสนอ ผลลัพธ์ของวิธีการทั้งสองนี้เหมือนกัน เพียงแต่อยู่ในรูปแบบที่แตกต่างกัน ทั้งนี้จะได้อภิปรายขั้นตอนการสร้างกราฟ G_n ก่อนการอธิบายวิธีการคำนวณผลรวมเส้นเชื่อม

3. ในบทความของ Lynch [4] เป็นเพียงแต่การตรวจสอบการเป็นกราฟแฮมิลตันของกราฟ G_n แต่วิธีการคำนวณหาผลรวมของเส้นเชื่อมที่นำเสนอในบทความนี้มีข้อดีเพิ่มขึ้นว่า จะทำให้ทราบระดับขั้นของแต่ละจุดยอดในกราฟ ซึ่งจะสามารถตรวจสอบการเป็นกราฟออยเลอร์ของกราฟ G_n ได้อีกด้วย

ขอให้พิจารณาปัญหาที่น่าท้าทายดังนี้ เพื่อน 7 คน คือ A, B, C, D, E, F และ G ต้องการนั่งรอบโต๊ะกลมในงานเลี้ยงสังสรรค์งานหนึ่ง โดยมีเงื่อนว่า

1. A ต้องไม่นั่งถัดจาก B หรือ C

2. B ต้องไม่นั่งถัดจาก C, E หรือ G

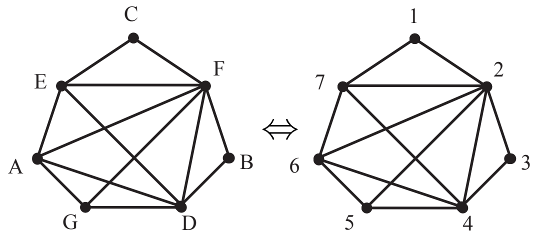
3. C ต้องไม่นั่งถัดจาก D หรือ G และ

4. E ต้องไม่นั่งถัดจาก G

เมื่อแปลงปัญหานี้โดยกราฟตัวแทนที่กำหนดให้จุดยอด 1 ถึง 7 แทนเพื่อน C, F, B, D, G, A, และ E ตามลำดับ และเส้นเชื่อมแทนการนั่งติดกันรอบโต๊ะกลม ซึ่งจะได้ดังรูปที่ 11

เราเรียกกราฟตัวแทนของปัญหา ซึ่งแสดงในรูปที่ 11 ว่ากราฟ G_7 แท้จริงแล้วปัญหาที่เรากำลังศึกษาอยู่นี้เป็นการหาวงแฮมิลตันในกราฟ G_7

Lynch [4] ได้พิสูจน์การมีวงแฮมิลตันเพียงหนึ่งเดียวของกราฟ G_n ถ้า G_n เป็นกราฟที่มีจำนวนจุดยอดเท่าใดก็ได้ที่มากกว่า 3 และต้องมีจำนวนเฉลี่ยของระดับขั้นมากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนจุดยอดทั้งหมด กราฟที่มีลักษณะดังกล่าวนี้สามารถนำไปสร้างเป็นปัญหาเชาว์ที่น่าสนใจได้ ดังเช่นปัญหาการจัดที่นั่งรอบโต๊ะกลมที่กำลังศึกษา



รูปที่ 11 กราฟ G_7 ซึ่งเป็นกราฟตัวแทนของปัญหาการนั่งรอบโต๊ะกลมดังกล่าวข้างต้น

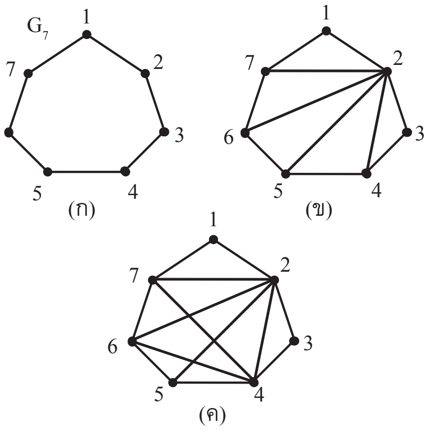
อย่างไรก็ตามหากกราฟยิ่งมีจุดยอดมาก (มีขนาดใหญ่มากขึ้น) ปัญหาเชาว์ที่ได้จะยิ่งมีความท้าทายมากยิ่งขึ้น

เมื่อมองย้อนกลับไปพิจารณากราฟ G_7 รูปที่ 11 ซึ่งมีจุดยอดมากกว่า 3 จุดยอด จำนวนเฉลี่ยของระดับขั้นเท่ากับ $26/7 \approx 3.7$ ซึ่งมีค่ามากกว่า ครึ่งหนึ่งของจำนวนจุดยอด ซึ่งมีค่าเท่ากับ $7/2 = 3.5$ ดังนั้นกราฟ G_7 จะมีวงแฮมิลตันเพียงวงเดียวเท่านั้น กล่าวคือ จะมีวิธีจัดที่นั่งตามเงื่อนไขที่กำลังศึกษาได้วิธีเดียวเท่านั้น คือ จัดให้ C, F, B, D, G, A, E, และ C นั่งถัดกันตามลำดับ ในรูปที่ 11 ด้านขวามือได้แสดงวิธีจัดลำดับการนั่งรอบโต๊ะวงกลมดังกล่าวนี้คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 1

ในการพิสูจน์ว่ากราฟ G_n มีจำนวนเฉลี่ยของระดับขั้นมากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนจุดยอดนั้น Lynch ได้แสดงวิธีการหาสูตรชัดแจ้งของ S_n ซึ่งคือผลรวมของเส้นเชื่อมของกราฟ G_n วิธีหนึ่ง โดยการสร้างกราฟ G_{n+2} จากการเพิ่มจุดยอดและเส้นเชื่อมเข้าไปในกราฟ G_n แล้วได้ความสัมพันธ์ระหว่าง S_n และ S_{n+2} ในรูปแบบความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_{n+2} = S_n + n + 1$ โดยที่สูตรชัดแจ้งของ S_n ได้จากการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ เป็นดังนี้

$$S_n = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{4}n^2 \qquad (1)$$

ในบทความวิชาการฉบับนี้จะได้เสนอวิธีการคำนวณจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G_n ในอีกวิธีหนึ่ง โดยการพิจารณาระดับขั้นของแต่ละจุดยอด ก่อนอื่นจะขออภิปรายถึงวิธีการสร้างกราฟ G_n จากบทความ [4] ดังนี้



รูปที่ 12 ตัวอย่างการสร้างกราฟ G_7

ขั้นตอนในการสร้างกราฟ G_n เป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างจุดยอด n จุด และลากเส้นเชื่อมทั้ง n จุด นั่นคือ เกิดเป็นรูป n เหลี่ยมที่มี n เส้นเชื่อม โดยกำหนดให้ชื่อจุดยอดแต่ละจุดยอด 1,2,3...,3 และ n

ขั้นที่ 2 เพิ่มเส้นเชื่อมที่เหลือในกราฟ G_n โดยการลากจากแต่ละจุดยอดที่เป็นเลขคู่ p เชื่อมไปยังจุดยอด q ที่ $q > p$

กราฟ G_n ที่สร้างขึ้นมานี้เป็นกราฟที่มีเซตของจุดยอดคือ $V(G_n) = \{1,...,n\}$ และเซตของเส้นเชื่อมคือ $E(G_n) = \{(j, j+1) : j = 1,...,n-1\} \cup \{(n,1)\} \cup \{(j,k)\} : j$ เป็นจำนวนคู่และ $2 \le j \le n, k \ge j+2\}$

ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างการสร้างกราฟ G_7 ดังนี้

ขั้นที่ 1 วาดจุดยอด 7 จุด และลากเส้นเชื่อมทั้ง 7 จุด ได้รูป 7 เหลี่ยม โดยให้ชื่อจุดยอดแต่ละจุดยอดเป็น 1,2,3,... และ 7 ดังรูปที่ 12 (ก)

ขั้นที่ 2 ขอให้พิจารณาจุดยอด 2 จะมีเส้นเชื่อมกับจุดยอด q ที่ $q > 2$ คือจุดยอด 3, 4, 5, 6 และ 7 แต่จุดยอด 3 มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด 2 อยู่แล้วจึงเพิ่มแต่เพียงเส้นเชื่อมกับจุดยอด 4, 5, 6 และ 7 ซึ่งรวมทั้งหมด 4 เส้น ดังรูปที่ 12 (ข)

เมื่อพิจารณาที่จุดยอด 4 ที่ต้องเพิ่มเส้นเชื่อมอีก 2 เท่านั้นเส้นคือ {4,6} และ {4,7} และเมื่อพิจารณาที่จุดยอด 6 ไม่มีการเพิ่มเส้นเชื่อมแล้ว กราฟ G_7 สมบูรณ์ที่ได้จากการสร้างดังกล่าวนี้แสดงในรูปที่ 12 (ค)

เราได้อภิปรายให้ทราบแล้วว่า Lynch [4] ได้พิสูจน์ว่ากราฟ G_n มีวงแฮมิลตันเพียงหนึ่งเดียว โดยวงนี้มีจุดเริ่มต้นคือจุดยอดที่มีชื่อ 1 และผ่านจุดยอดทั้งหมดโดยเรียงลำดับตามตัวเลขจากน้อยไปหามาก และสิ้นสุดที่จุดเริ่มต้น ดังนั้นขอให้สังเกตว่า กราฟ G_n มีวงแฮมิลตันคือ $1,2,3,...n,1$ สำหรับทุก $n \ge 3$

วิธีการคำนวณจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ G_n

ต่อไปจะกล่าวถึงวิธีการคำนวณจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G_n ขอให้สังเกตว่า เมื่อพิจารณาระดับขั้นของแต่ละจุดยอดในกราฟ G_n ควบคู่กับหลักการสร้างกราฟ G_n แล้วจะพบว่า สำหรับจุดยอดที่มีชื่อกำกับเป็นเลขคี่ q นั้นได้ว่า ระดับขั้นของจุดยอด q โดยคำนวณได้จาก

$$\mathrm{d}(q) = \begin{cases} \dfrac{q+1}{2} & \text{เมื่อ } q \ne 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } q = 1 \end{cases}$$

ถ้า $q = 2k - 1$ เมื่อ $k = 1,2,...m$ โดยที่ m แทนจำนวนจุดยอดที่มีชื่อกำกับเป็นเลขคี่และมีความสัมพันธ์กับจำนวนจุดยอดทั้งหมดในกราฟ G_n ดังนี้

$$m = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{n}{2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum \mathrm{d}(q) &= 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{(2k-1)+1}{2} \\ &= 2 + \left(\frac{m(m+1)}{2} - 1 \right) = 1 + \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

สำหรับจุดยอดที่มีชื่อกำกับเป็นเลขคู่ p ได้ว่าระดับขั้นของจุดยอด p คำนวณได้จาก

$$\mathrm{d}(p) = \begin{cases} n - \dfrac{p}{2} & \text{เมื่อ } p \ne n \\ \dfrac{n}{2} + 1 & \text{เมื่อ } p = n \end{cases}$$

ถ้า $p = 2k$ เมื่อ $k = 1,2,3...,m'$ โดยที่ m' คือจำนวนจุดยอดที่มีชื่อกำกับเป็นเลขคู่ และมีความสัมพันธ์กับจำนวนจุดยอดทั้งหมดในกราฟ G_n ดังนี้

$$m' = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{n}{2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

จึงได้ว่า

$$\sum \mathrm{d}(p) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m'} (n - \frac{p}{2}) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{m'} (n - \frac{p}{2})\right) + (\frac{n}{2}+1) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m'} (n - k) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{m'-1} (n - k)\right) + (\frac{n}{2}+1) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} nm' - \dfrac{m'(m'+1)}{2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ n(m'-1) - \dfrac{(m'-1)m'}{2} + \dfrac{n}{2} + 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

เมื่อพิจารณาผลรวมของระดับขั้น G_n โดยแบ่งเป็นสองกรณี ได้ดังนี้

กรณี 1 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ ได้ว่า

$$\sum \mathrm{d}(v) = \sum \mathrm{d}(q) + \sum \mathrm{d}(p)$$
$$= \left(1 + \frac{m(m+1)}{2}\right) + \left(nm' - \frac{m'(m'+1)}{2}\right)$$

เนื่องจากกรณี n เป็นจำนวนคี่ มีว่า $m = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ และ $m' = \left(\dfrac{n-1}{2}\right)$ ดังนั้น

$$\sum \mathrm{d}(v) = \left(1 + \frac{n^2+4n+3}{8}\right) + \left(\frac{n^2-n}{2} - \frac{n^2-1}{8}\right)$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{n^2}{2} \qquad (2)$$

กรณี 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

$$\sum \mathrm{d}(v) = \sum \mathrm{d}(q) + \sum \mathrm{d}(p)$$
$$= \left(1 + \frac{m(m+1)}{2}\right) + \left(n(m'-1) - \frac{(m'-1)m'}{2} + \frac{n}{2} + 1\right)$$

เนื่องจากกรณี n เป็นจำนวนคู่ มีว่า $m' = m \; = n/2$ ดังนั้น

$$\sum \mathrm{d}(v) = 2 + \frac{n^2}{2} \qquad (3)$$

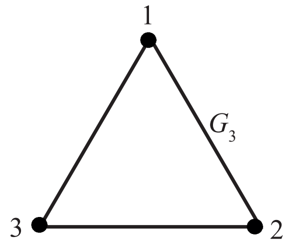
จากทั้งสองกรณีและบทตั้ง 2.1 ได้ว่า จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟแทนด้วย S_n เท่ากับ $(\Sigma \mathrm{d}(v))/2$ เมื่อแทน (2) และ (4) ลงใน $\Sigma \mathrm{d}(v)$ จึงได้

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}n^2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 1 + \dfrac{1}{4}n^2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases} \qquad (4)$$

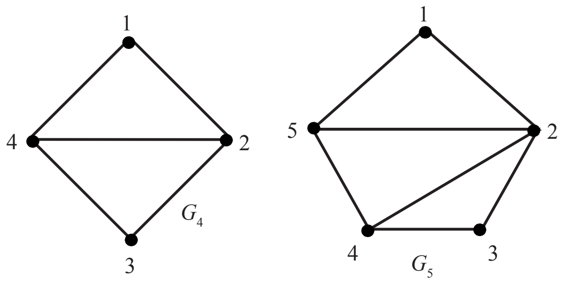
ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากสูตร (4) คือสูตรเดียวกันกับผลลัพธ์ของ Lynch [4] เพียงแต่เขียนต่างรูปแบบกัน ก่อนหน้านี้ เราได้ตรวจสอบว่ากราฟ G_n จะมีวงแฮมิลตันหรือไม่จากเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับระดับขั้นของจุดยอด มีข้อสังเกตว่า เราไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 4.1 ในการตรวจสอบการมีวงแฮมิลตันของกราฟ G_n ได้ เพราะว่า $\mathrm{d}(v) \ngeq \frac{n}{2}$ สำหรับบางค่า n เช่น G_3 และ G_4 สามารถตรวจสอบได้ แต่สำหรับ G_n เมื่อ $n \geq 5$ ทฤษฎีบทที่ 4.1 ไม่สามารถตรวจสอบได้

ท้ายสุดนี้จะได้พิจารณาถึงการตรวจสอบกราฟออยเลอร์จากระดับขั้นของจุดยอดบ้างดังนี้ ทั้งนี้รูปที่ 13 แสดงกราฟ G_3

เมื่อพิจารณาระดับขั้นของ $\mathrm{d}(v)$ ของแต่ละจุดยอด v ในกราฟ G_n และจากทฤษฎีบท 3.1 พบว่า G_n ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เมื่อ $n \geq 4$ แต่ G_3 เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะ G_3 เป็นกราฟเชื่อมโยงและทุกจุดยอดเป็นมีดีกรีเป็นจำนวนคู่



รูปที่ 13 ตัวอย่างกราฟ G_3



รูปที่ 14 ตัวอย่างกราฟ G_4 และ G_5

หลังจากทุกจุดยอดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ดังรูปที่ 13 ทั้งนี้ รูปที่ 14 แสดงกราฟ G_4 และ G_5

แต่เมื่อการพิจารณาระดับขั้นของแต่ละจุดยอดในกราฟ G_n โดยสมการ (2) และ (4) ร่วมกับทฤษฎีบท 3.3 ได้ว่ากราฟ G_4, G_5, G_6 และ G_7 มีรอยเดินออยเลอร์ เพราะมีจุดยอดคี่เพียง 2 จุดและ G_n เมื่อ $n \geq 8$ มีจุดยอดคี่มากกว่า 2 จุด จึงได้ว่าไม่มีรอยเดินออยเลอร์

G_4 มีรอยเดินออยเลอร์ โดยมีจุดปลายของรอยเดินคือ 2, 4 เช่น 2, 1, 4, 3, 2 และ 4

G_5 มีจุดปลายของรอยเดินคือ 4, 5 เช่น 4, 3, 2, 1, 5, 4, 2 และ 5

G_6 จะมีรอยเดินออยเลอร์ จุดปลายคือ 2, 5 และ G_7 จะมีรอยเดินออยเลอร์ จุดปลายคือ 5, 4

8. สรุป

ในบทความวิชาการฉบับนี้จะได้นำเสนอการหาคำตอบของปัญหาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟของปัญหาคลาสสิกที่สำคัญ 3 ปัญหา ได้แก่ ปัญหาการจับมือทักทายในงานเลี้ยง ปัญหาการเดินข้ามสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก ปัญหาการหาวงแฮมิลตันและรอยเดินออยเลอร์ในกราฟ นอกจากนี้ได้อธิบายการแก้ปัญหาโดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์และกราฟแฮมิลตัน โครงสร้างของกราฟทั้งสองนี้มีสมบัติที่บริบูรณ์เพียบพร้อม จึงเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย และเป็นกราฟพื้นฐานที่สำคัญในขยายงานวิจัยต่าง ๆ อีกมากมาย

9. กิตติกรรมประกาศ

บทความวิชาการฉบับนี้ได้รับเงินวิจัยสนับสนุนโดยกองทุนวิจัยวิทยาเขตปัตตานี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

เอกสารอ้างอิง

[1] J. Clark and D. A. Holton, *A first look at graph theorey*, Singapore: World Scientific, 2005.

[2] G. A. Dirac, "Some theorems on abstract graphs," in *Proceeding of the London Mathematical Society*, 3rd Ser., 1952, pp. 69–81.

[3] L. Euler, "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis," (The solution of a problem relating to the geometry of position) Comment, *Academiae Sci. I. Petropolitanae*, vol. 8, pp. 128–140, 1736.

[4] M. A. M. Lynch, "Creating recreational Hamiltonian cycle problems," *Mathematical Gazette*, vol. 512, pp.215–218, 2004.