



ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ

สุภาภรณ์ สดวกดี* พรจิรา อินทนอย และ ณีภูษิญา ยอดออน
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08 4848 8410 อีเมล: aa_o_rr@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2019.08.001
รับเมื่อ 21 กุมภาพันธ์ 2562 แก้ไขเมื่อ 23 เมษายน 2562 ตอรับเมื่อ 24 เมษายน 2562 เผยแพร่ออนไลน์ 26 สิงหาคม 2562
© 2019 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อปรับปรุงขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ และหาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ และ 2) เพื่อแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ ผลการวิจัยพบว่า ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟอยู่ในพจน์ของอันดับและขนาดของกราฟ และขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ W_n กราฟพัดลม F_n และกราฟมีตรภาพ T_n อยู่ในพจน์ของ n และกราฟล้อพับ- t $W_{n,t}$ อยู่ในพจน์ของ n และ t นอกจากนี้ ยังได้เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อสำหรับกราฟทุกกราฟที่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดด้วยค่าคงตัวมายากลซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างขอบเขตที่ได้

คำสำคัญ: เลเบลลิง เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด กราฟล้อ



Bounds of Magic Constants for Vertex-magic Total Labelings of Wheels and Related Graphs

Supaporn Saduakdee*, Pornjira Intanuoy and Natchaya Yod-on

Program of Mathematics, Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 08 4848 8410, E-mail: aa_o_rr@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2019.08.001

Received 21 February 2019; Revised 23 April 2019; Accepted 24 April 2019; Published online: 26 August 2019

© 2019 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

The purposes of this research are 1) to improve bounds of magic constants for vertex-magic total labelings of wheels and find bounds of magic constants for vertex-magic total labelings of wheel related graphs, and 2) to present vertex-magic total labelings of wheels and related graphs. The results of the research found that the bounds of magic constants for vertex-magic total labelings of graphs are depicted in terms of their order and size, and the bounds of magic constants for vertex-magic total labelings of wheels W_n , fans F_n and friendship graphs T_n in terms of n and t -fold wheels $W_{n,t}$ in terms of n and t . Moreover, vertex-magic total labelings of wheels and related graphs for every graph having vertex-magic total labelings are obtained with magic constants which are between the bounds.

Keywords: Labeling, Vertex-magic Total Labeling, Wheel

1. บทนำ

เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟเป็นการระบายสีกราฟชนิดหนึ่ง ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับการระบายสีจุดและเส้นของกราฟ โดยกำหนดฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากเซตของจุดและเซตของเส้นของกราฟไปยังเซตของจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึงผลรวมของอันดับและขนาดของกราฟ โดยมีเงื่อนไขว่า สำหรับแต่ละจุดของกราฟ ผลรวมของค่าฟังก์ชันของจุดและค่าฟังก์ชันของเส้นที่กระทบกับจุดนั้นจะต้องเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน จะเห็นว่าการระบายสีตามเงื่อนไขที่กล่าวมาอาจทำได้ยากที่จะทำให้ได้เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด จึงน่าสนใจที่จะศึกษาเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดสำหรับกราฟที่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด ซึ่งนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้แสดงว่า กราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อบางกราฟมีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด

ในปี ค.ศ. 2001 MacDougall *et al.* [1] ได้แสดงขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ ซึ่งเป็นประโยชน์ในการช่วยหาเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟ และได้แสดงเลเบลของจุดและเลเบลของเส้นแยกตามประเภทของจุดและเส้นสำหรับกราฟล้อ กราฟพัดลม และกราฟเมตรภาพ ต่อมาในปี ค.ศ. 2008 Baker and Sawada [2] ได้หาจำนวนเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อสำหรับค่าคงตัวมายากลแต่ละค่าที่เป็นไปได้

ดังนั้น คณะผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟ โดยมีวัตถุประสงค์ คือ 1) เพื่อปรับปรุงขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ และหาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ และ 2) เพื่อแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ สำหรับขอบเขตของการวิจัย คณะผู้วิจัยจะหาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ เฉพาะกราฟพัดลม กราฟเมตรภาพ และกราฟล้อพับ- r



รูปที่ 1 กราฟวิถี P_3

และแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ เฉพาะกราฟพัดลม และกราฟเมตรภาพ สมมติฐานการวิจัย คือ ได้ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อที่ดีกว่าขอบเขตที่ได้จาก MacDougall *et al.* [1] โดยกราฟทั้งหมดที่พิจารณาในบทความวิจัยนี้เป็นกราฟเชิงเดียว

กำหนดให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวที่มีอันดับ n และขนาด m เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด (Vertex-magic Total Labeling) ของกราฟ G คือ ฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + m\}$$

โดยที่ มีจำนวนเต็มบวก k ซึ่งทำให้

$$f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(uv) = k$$

สำหรับทุกๆ จุด u ในกราฟ G

เมื่อ $N(u)$ แทนเซตของจุดทั้งหมดที่ประชิดกับ u ในกราฟ G ผลรวม $f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(uv)$ เขียนแทนด้วย $wt(u)$ เรียกว่า น้ำหนัก (Weight) ของจุด u

จำนวนเต็มบวก k เรียกว่า ค่าคงตัวมายากล (Magic Constant) สำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด f

กราฟ G เรียกว่า มายากลของจุด (Vertex Magic) ถ้ากราฟ G มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด

ตัวอย่าง เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟวิถี P_3 และกราฟวง C_3

พิจารณากราฟวิถี P_3 ซึ่งเป็นกราฟที่มีอันดับ 3 และขนาด 2 ดังรูปที่ 1

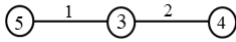
$$\text{กำหนด } f : V(P_3) \cup E(P_3) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5\}$$

นิยามโดย

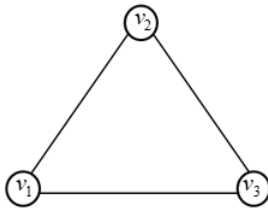
$$f(v_1) = 5, \quad f(v_2) = 3, \quad f(v_3) = 4,$$

$$f(v_1v_2) = 1 \text{ และ } f(v_2v_3) = 2$$

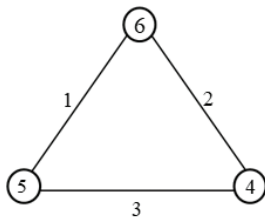
ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 เลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟวิถี P_3



รูปที่ 3 กราฟวง C_3



รูปที่ 4 เลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟวง C_3

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(v_1) + f(v_1v_2) &= f(v_3) + f(v_3v_2) \\ &= f(v_2) + f(v_2v_1) + f(v_2v_3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟวิถี P_3 มีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุด ด้วยค่าคงตัวมายาก $k = 6$

พิจารณากราฟวง C_3 ซึ่งเป็นกราฟที่มีอันดับ 3 และขนาด 3 ดังรูปที่ 3

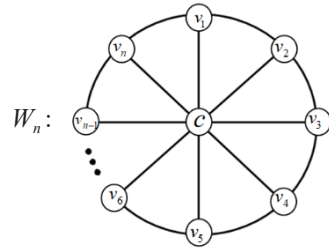
กำหนด $f: V(C_3) \cup E(C_3) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$

นิยามโดย

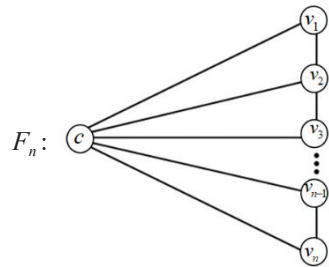
$$\begin{aligned} f(v_1) &= 5, \quad f(v_2) = 6, \quad f(v_3) = 4, \\ f(v_1v_2) &= 1, \quad f(v_2v_3) = 2 \quad \text{และ} \quad f(v_1v_3) = 3 \end{aligned}$$

ดังรูปที่ 4

จะได้ว่า



รูปที่ 5 กราฟล้อ W_n ที่มี $V(W_n) = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$



รูปที่ 6 กราฟพัดลม F_n ที่มี $V(F_n) = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$

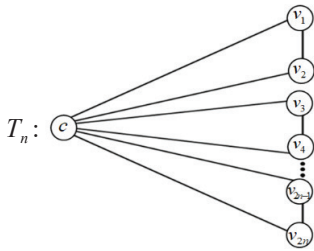
$$\begin{aligned} f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_3) \\ &= f(v_2) + f(v_2v_1) + f(v_2v_3) \\ &= f(v_3) + f(v_3v_1) + f(v_3v_2) \\ &= 9 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟวง C_3 มีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุด ด้วยค่าคงตัวมายาก $k = 9$

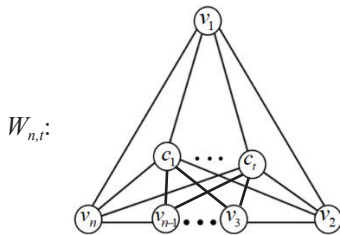
สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ กราฟล้อ (Wheel) W_n คือ กราฟร่วม $K_1 + C_n$ ที่มี $V(W_n) = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ โดยที่ $c \in V(K_1)$ และ $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(C_n)$ เรียก c ว่า จุดรวม (Hub) และเรียก v_1, v_2, \dots, v_n ว่า จุดขอบ (Rims) ดังรูปที่ 5

สำหรับจำนวนเต็ม $m \geq 1$ และ $n \geq 2$ กราฟพัดลม (Fan) $F_{m,n}$ คือ กราฟร่วม $\bar{K}_m + P_n$ ซึ่งคณะผู้วิจัยจะศึกษา เฉพาะกรณีที่ $m = 1$ และ $n \geq 2$ และเขียนแทนด้วย F_n นั่นคือ กราฟร่วม $\bar{K}_1 + P_n$ ที่มี $V(F_n) = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ โดยที่ $c \in V(\bar{K}_1)$ และ $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(P_n)$ เรียก c ว่า จุดรวม และเรียก v_1, v_2, \dots, v_n ว่า จุดขอบ ดังรูปที่ 6

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ กราฟมิตรภาพ (Friendship Graph) T_n คือ กราฟร่วม $K_1 + nK_2$ ที่มี $V(T_n) = \{c, v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ โดยที่ $c \in V(K_1)$ และ $v_1, v_2, \dots, v_{2n} \in V(nK_2)$ เรียก c ว่า จุดรวม และเรียก v_1, v_2, \dots, v_{2n} ว่า จุดขอบ ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 กราฟมิตรภาพ T_n ที่มี $V(T_n) = \{c, v_1, v_2, \dots, v_n\}$



รูปที่ 8 กราฟล้อพับ- t $W_{n,t}$ ที่มี $V(W_{n,t}) = \{c_1, c_2, \dots, c_t, v_1, v_2, \dots, v_n\}$

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ และ $t \geq 1$ กราฟล้อพับ- t (t-fold Wheel Graph) $W_{n,t}$ คือ กราฟร่วม $tK_1 + C_n$ ที่มี $V(W_{n,t}) = \{c_1, c_2, \dots, c_t, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ โดยที่ $c_1, c_2, \dots, c_t \in V(tK_1)$ และ $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(C_n)$ เรียก c_1, c_2, \dots, c_t ว่า จุดรวม และเรียก v_1, v_2, \dots, v_n ว่า จุดขอบ ดังรูปที่ 8

MacDougall *et al.* [1] ได้ศึกษาเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ ซึ่งได้แก่ กราฟพัลลุม กราฟมิตรภาพ และกราฟล้อพับ- t โดยแสดงขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ ดังนี้

$$\frac{13n^2 + 7n + 3}{2n + 2} \leq k \leq \frac{17n^2 + 15n + 4}{2n + 2}$$

และได้ข้อสรุปสำหรับการมีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ ดังนี้

1. กราฟล้อ W_n ไม่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด เมื่อ $n > 11$
2. กราฟพัลลุม F_n ไม่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด เมื่อ $n > 10$
3. กราฟมิตรภาพ T_n ไม่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด เมื่อ $n > 3$

4. กราฟล้อพับ- t $W_{n,t}$ ไม่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด เมื่อ $n > N_t$ โดยที่ N_t แทนจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ทำให้

$$tn^2 - (t^2 + 4t + 6)n - (2t^2 + 6t + 2) < 0$$

นอกจากนี้ ยังได้แสดงเลเบลลิงของจุดและเลเบลลิงของเส้นแยกตามประเภทของจุดและเส้นสำหรับกราฟทุกกราฟที่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด

Slamin *et al.* [3] ได้ศึกษาเลเบลลิงแบบรวมมายากลของเส้นของกราฟล้อ กราฟพัลลุม และกราฟมิตรภาพ ซึ่งได้ผลการศึกษาดังนี้ สำหรับ $n \equiv 6 \pmod{8}$ กราฟล้อ W_n มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของเส้น ด้วยค่าคงตัวมายากล $k = 5n + 2$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2$ กราฟพัลลุม F_n มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของเส้น ด้วยค่าคงตัวมายากล $k = 4n + 2$ และกราฟมิตรภาพ T_n เป็นมายากลของเส้น ก็ต่อเมื่อ $3 \leq n \leq 5$ และ $n = 7$

Baker and Sawada [2] ได้ศึกษาเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟวงและกราฟล้อ โดยได้แสดงขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ และใช้อัลกอริทึมเพื่อหาจำนวนเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดที่แตกต่างกันของกราฟวงและกราฟล้อ นอกจากนี้ ยังได้หาจำนวนเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟวงและกราฟล้อสำหรับค่าคงตัวมายากล แต่ละค่าที่เป็นไปได้

Murugesan and Amutha [4] ได้ศึกษาเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดในกราฟแฮมิลโทเนียน ซึ่งได้แก่ กราฟวง กราฟแบบบริบูรณ์ และกราฟล้อ โดยพิสูจน์ว่า กราฟวงทั้งหมดมีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด และเนื่องจากกราฟแฮมิลโทเนียนบรรจุวง ดังนั้น จึงได้ศึกษาความสัมพันธ์ของเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดในกราฟแฮมิลโทเนียน

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ คณะผู้วิจัยจึงสนใจที่จะปรับปรุงขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ และหาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ และเพื่อ

ยืนยันว่ามีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ ด้วยค่าคงตัวมายากซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างขอบเขตที่ได้ คณะผู้วิจัยจะแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อสำหรับกราฟทุกกราฟที่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุด

2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎี ซึ่งมีประโยชน์ในการพัฒนาองค์ความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟ และสามารถนำผลงานวิจัยไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในชีวิตประจำวัน โดยคณะผู้วิจัยจะสร้างทฤษฎีบท และพิสูจน์ทฤษฎีบทเพื่อยืนยันว่าเป็นจริง ซึ่งมีวิธีดำเนินการวิจัย ดังนี้

1. ศึกษานิยามของเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟ
2. ศึกษานิยามและสมบัติของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ
3. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟ
4. ปรับปรุงขอบเขตของค่าคงตัวมายากสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟล้อ และหาขอบเขตของค่าคงตัวมายากสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ
5. แสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ
6. ตั้งข้อคาดการณ์และพิสูจน์ผลสรุปที่เป็นจริง
7. ตรวจสอบความถูกต้องของผลสรุปที่ได้ และเรียงลำดับเนื้อหาให้สอดคล้องกัน

3. ผลการวิจัย

3.1 ขอบเขตของค่าคงตัวมายากสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ

สำหรับกราฟที่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุด เมื่อพิจารณาผลรวมของน้ำหนักของจุดทั้งหมด จะได้ว่าเลเบลของจุดแต่ละจุดจะถูกนับหนึ่งครั้ง และเนื่องจากเส้นแต่ละเส้นกระทบกับจุดสองจุด ดังนั้น เลเบลของเส้นแต่ละเส้นจะถูก

นับสองครั้ง จึงได้ข้อสังเกตดังต่อไปนี้

ข้อสังเกต 1 สำหรับกราฟ G ใดๆ ที่มีอันดับ n และขนาด m ซึ่ง $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ถ้า G มีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุด ซึ่งเลเบลจุดด้วย L_1, L_2, \dots, L_n และเลเบลเส้นด้วย l_1, l_2, \dots, l_m แล้ว

$$\sum_{i=1}^n wt(v_i) = \sum_{i=1}^n L_i + 2 \sum_{i=1}^m l_i$$

จากผลรวมของน้ำหนักของจุดทั้งหมดที่ได้จากข้อสังเกต 1 ทำให้ได้ขอบเขตของค่าคงตัวมายากสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุดของกราฟ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 สำหรับกราฟ G ใดๆ ที่มีอันดับ n และขนาด m ถ้า G มีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุด ด้วยค่าคงตัวมายาก k แล้ว

$$k \geq \frac{2m^2 + 2mn + n^2 + 2m + n}{2n}$$

และ

$$k \leq \frac{2m^2 + 4mn + n^2 + 2m + n}{2n}$$

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟใดๆ ที่มีอันดับ n และขนาด m สมมติ G มีเลเบลลิงแบบรวมมายากของจุด ด้วยค่าคงตัวมายาก k จากข้อสังเกต 1 จะได้

$$\sum_{i=1}^n wt(v_i) = \sum_{i=1}^n L_i + 2 \sum_{i=1}^m l_i = \left(\sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=1}^m l_i \right) + \sum_{i=1}^m l_i$$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=1}^m l_i$ เป็นผลรวมของเลเบลของจุดและเลเบลของเส้นทั้งหมด จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=1}^m l_i = \sum_{i=1}^{n+m} i$$

พิจารณารอบเขตล่างของ k

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^m l_i \geq \sum_{i=1}^m i$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n wt(v_i) &= \left(\sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=1}^m l_i \right) + \sum_{i=1}^m l_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{n+m} i + \sum_{i=1}^m i = \frac{2m^2 + 2mn + n^2 + 2m + n}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก k เป็นน้ำหนักที่เท่ากันของจุดแต่ละจุด ดังนั้น

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n wt(v_i)}{n} \geq \frac{2m^2 + 2mn + n^2 + 2m + n}{2n}$$

พิจารณาขอบเขตบนของ k

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^m l_i \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} i$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n wt(v_i) &= \left(\sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=1}^m l_i \right) + \sum_{i=1}^m l_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+m} i + \sum_{i=n+1}^{n+m} i = \frac{2m^2 + 4mn + n^2 + 2m + n}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก k เป็นน้ำหนักที่เท่ากันของจุดแต่ละจุด ดังนั้น

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n wt(v_i)}{n} \leq \frac{2m^2 + 4mn + n^2 + 2m + n}{2n}$$

จากที่ MacDougall *et al.* [1] ได้ข้อสรุปสำหรับการมีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ ดังนั้น พิจารณากราฟล้อ W_n กราฟพัดลม F_n กราฟมิตรภาพ T_n และกราฟล้อพับ- t $W_{n,t}$ เมื่อ $3 \leq n \leq 11$, $2 \leq n \leq 10$, $1 \leq n \leq 3$ และ $3 \leq n \leq N_t$ ตามลำดับ โดยที่ N_t แทนจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ทำให้

$$tn^2 - (t^2 + 4t + 6)n - (2t^2 + 6t + 2) < 0$$

เนื่องจาก W_n มีอันดับ $n+1$ และขนาด $2n$ F_n มีอันดับ $n+1$ และขนาด $2n-1$ T_n มีอันดับ $2n+1$ และขนาด $3n$ และ $W_{n,t}$ มีอันดับ $n+t$ และขนาด $nt+n$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟ ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1 สำหรับกราฟล้อ W_n เมื่อ $3 \leq n \leq 11$ และค่าคงตัวมายากล k สำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของ W_n จะได้ว่า

$$\frac{13n^2 + 11n + 2}{2n + 2} \leq k \leq \frac{17n^2 + 15n + 2}{2n + 2}$$

จากที่ MacDougall *et al.* [1] ได้หาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ ไว้ดังนี้

$$\frac{13n^2 + 7n + 3}{2n + 2} \leq k \leq \frac{17n^2 + 15n + 4}{2n + 2}$$

จะเห็นว่า ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อที่ได้จากบทแทรก 1 ดีกว่าขอบเขตที่ได้จาก MacDougall *et al.* [1]

บทแทรก 2 สำหรับกราฟพัดลม F_n เมื่อ $2 \leq n \leq 10$ และค่าคงตัวมายากล k สำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของ F_n จะได้ว่า

$$\frac{13n^2 + n}{2n + 2} \leq k \leq \frac{17n^2 + 3n - 2}{2n + 2}$$

บทแทรก 3 สำหรับกราฟมิตรภาพ T_n เมื่อ $1 \leq n \leq 3$ และค่าคงตัวมายากล k สำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของ T_n จะได้ว่า

$$\frac{17n^2 + 9n + 1}{2n + 2} \leq k \leq \frac{23n^2 + 12n + 1}{2n + 2}$$

บทแทรก 4 สำหรับกราฟล้อพับ- t $W_{n,t}$ เมื่อ $3 \leq n \leq N_t$ และค่าคงตัวมายากล k สำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของ $W_{n,t}$ จะได้ว่า

$$k \geq \frac{2n^2t^2 + 6n^2t + 2nt^2 + 6nt + 5n^2 + 3n + t^2 + t}{2n + 2t}$$

และ

$$k \leq \frac{2n^2t^2 + 8n^2t + 4nt^2 + 8nt + 7n^2 + 3n + t^2 + t}{2n + 2t}$$

เมื่อ N_t แทนจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ทำให้

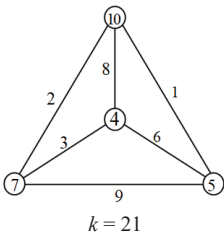
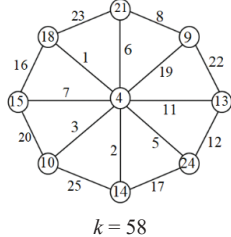
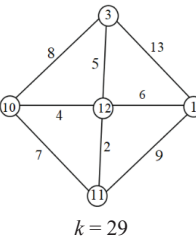
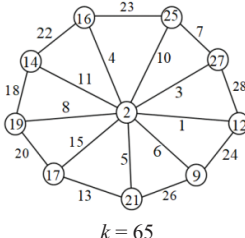
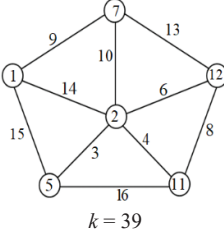
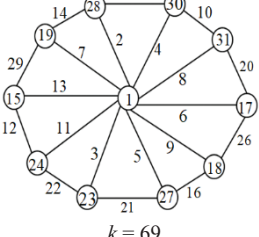
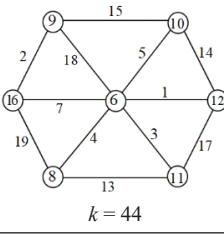
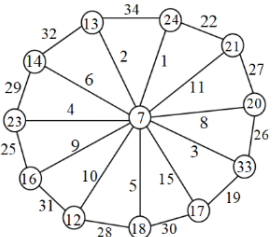
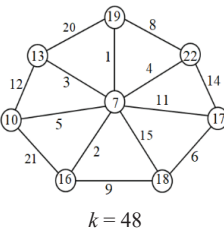
$$tn^2 - (t^2 + 4t + 6)n - (2t^2 + 6t + 2) < 0$$

3.2 เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ

เพื่อยืนยันว่ามีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ ด้วยค่าคงตัวมายากลซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างขอบเขตที่ได้จากบทแทรก 1, 2 และ 3 คณะผู้วิจัยจึงแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อสำหรับกราฟทุกกราฟที่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด แสดงดังตารางที่ 1-3

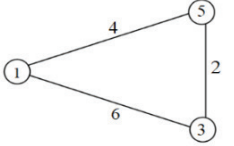
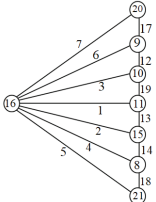
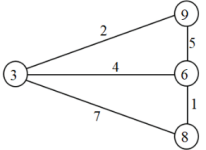
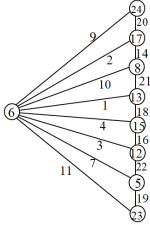
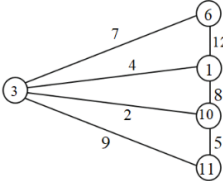
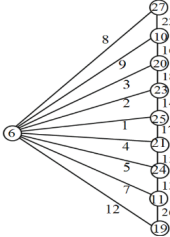
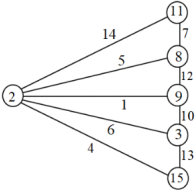
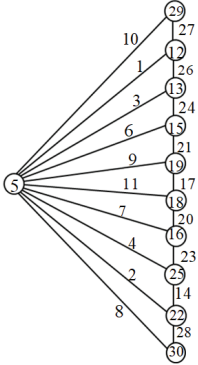
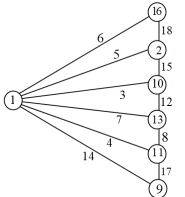


ตารางที่ 1 เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ W_n

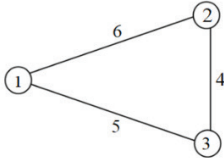
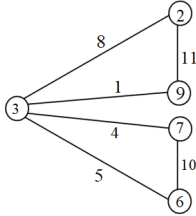
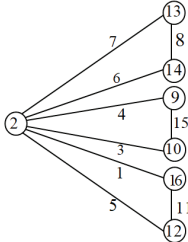
n	ขอบเขตของค่าคงตัวมายากล k	เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด	n	ขอบเขตของค่าคงตัวมายากล k	เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด
3	$19 \leq k \leq 25$	W_3 :  $k = 21$	8	$52 \leq k \leq 67$	W_8 :  $k = 58$
4	$26 \leq k \leq 33$	W_4 :  $k = 29$	9	$58 \leq k \leq 75$	W_9 :  $k = 65$
5	$32 \leq k \leq 41$	W_5 :  $k = 39$	10	$65 \leq k \leq 84$	W_{10} :  $k = 69$
6	$39 \leq k \leq 50$	W_6 :  $k = 44$	11	$71 \leq k \leq 92$	W_{11} :  $k = 81$
7	$45 \leq k \leq 58$	W_7 :  $k = 48$			

สุภาภรณ์ สดวกดี และคณะ, “ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ.”

ตารางที่ 2 เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟพัคลม F_n

n	ขอบเขตของค่าคงตัวมายากล k	เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด	n	ขอบเขตของค่าคงตัวมายากล k	เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด
2	$9 \leq k \leq 12$	F_2 :  $k = 11$	7	$41 \leq k \leq 53$	F_7 :  $k = 44$
3	$15 \leq k \leq 20$	F_3 :  $k = 16$	8	$47 \leq k \leq 61$	F_8 :  $k = 53$
4	$22 \leq k \leq 28$	F_4 :  $k = 25$	9	$54 \leq k \leq 70$	F_9 :  $k = 57$
5	$28 \leq k \leq 36$	F_5 :  $k = 32$	10	$60 \leq k \leq 78$	F_{10} :  $k = 66$
6	$34 \leq k \leq 44$	F_6 :  $k = 40$			

ตารางที่ 3 เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟ
มีตริภาพ T_n

n	ขอบเขตของค่าคงตัวมายากล k	เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด
1	$9 \leq k \leq 12$	T_1 :  $k = 12$
2	$18 \leq k \leq 23$	T_2 :  $k = 21$
3	$26 \leq k \leq 34$	T_3 :  $k = 28$

จากตารางที่ 1-3 จะเห็นว่า ค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ กราฟพัดลม และกราฟมีตริภาพสำหรับกราฟทุกกราฟที่มีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดมีค่าอยู่ระหว่างขอบเขตที่ได้จากบทแทรก 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

4. อภิปรายผลและสรุป

4.1 จากทฤษฎีบท 1 ทำให้ได้ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟในพจน์ของอันดับและขนาดของกราฟ และขอบเขตของ

ค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ W_n กราฟพัดลม F_n และกราฟมีตริภาพ T_n อยู่ในพจน์ของ n และกราฟล้อพับ- t $W_{n,t}$ อยู่ในพจน์ของ n และ t ซึ่งช่วยในการแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟ

4.2 นอกจากกราฟล้อ กราฟพัดลม กราฟมีตริภาพ และกราฟล้อพับ- t ยังสามารถหาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟอื่นๆ ได้จากทฤษฎีบท 1 เช่น กราฟวิถี P_n ที่มีอันดับ n และขนาด $n-1$ จะได้ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟวิถี P_n คือ $\frac{5n-3}{2}$ และ $\frac{7n-5}{2}$ ตามลำดับ และกราฟวง C_n ที่มีอันดับ n และขนาด n จะได้ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟวง C_n คือ $\frac{5n+3}{2}$ และ $\frac{7n+3}{2}$ ตามลำดับ เป็นต้น

4.3 ขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อที่ได้จากบทแทรก 1 ดีกว่าขอบเขตที่ได้จาก MacDougall *et al.* [1]

4.4 จากการแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อและกราฟที่สัมพันธ์กับกราฟล้อ ซึ่งได้แก่ กราฟพัดลม และกราฟมีตริภาพ ทำให้ได้เลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟล้อ กราฟพัดลม และกราฟมีตริภาพ ด้วยค่าคงตัวมายากลซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างขอบเขตของค่าคงตัวมายากลที่ได้จากบทแทรก 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

4.5 เนื่องจากกราฟแต่ละกราฟไม่จำเป็นต้องมีเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุด ด้วยค่าคงตัวมายากลที่เป็นจำนวนเต็มบวกทุกจำนวน ดังนั้นการศึกษาขอบเขตของค่าคงตัวมายากลสำหรับเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟ จึงมีประโยชน์อย่างมากในการช่วยแสดงเลเบลลิงแบบรวมมายากลของจุดของกราฟ

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม ที่ให้ทุนสนับสนุนการวิจัยในครั้งนี้



เอกสารอ้างอิง

- [1] J. A. MacDougall, M. Miller, and W. D. Wallis, "Vertex-magic total labelings of wheels and related graphs," *Utilitas Mathematica*, vol. 62, pp. 175–183, 2002.
- [2] A. Baker and J. Sawada, "Magic labelings on cycles and wheels," *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5165, pp. 361–373, 2008.
- [3] Slamain, M. Baca, Y. Lin, M. Miller, and R. Simanjuntak, "Edge-magic total labelings of wheels, fans and friendship graphs," *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, vol. 35, pp. 89–98, 2002.
- [4] N. Murugesan and R. Senthil Amutha, "Vertex magic total labeling in Hamiltonian graphs," *Journal of Progressive Research in Mathematics (JPRM)*, vol. 6, no. 1, pp. 684–693, 2015.