

## การวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุน ด้วยวิธีบาวนด์อาร์/ โดเมนเอลิเมนต์

มนต์ชัย ปัญญาทอง\*

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธาและสิ่งแวดล้อม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 5372 3979 ต่อ 4401 อีเมล: monchai\_art@mutl.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.03.006  
รับเมื่อ 28 สิงหาคม 2562 แก้ไขเมื่อ 7 ตุลาคม 2562 ตอรับเมื่อ 17 ตุลาคม 2562 เผยแพร่ออนไลน์ 30 มีนาคม 2563

© 2020 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาวิธีบาวนด์อาร์/โดเมนเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุน ด้วยวิธีบาวนด์อาร์/โดเมนเอลิเมนต์พัฒนาขึ้นจากวิธีสมการแอนะล็อก จากหลักการของวิธีสมการแอนะล็อก สมการที่นำมาแทนสมการอนุพันธ์ของปัญหาเดิมคือ สมการอนุพันธ์ที่ไม่ขึ้นต่อกันซึ่งอยู่ภายใต้แหล่งกำเนิดสมมุติจำนวนสามสมการโดยมีเงื่อนไขขอบเขตแบบเดียวกับปัญหาเดิม ซึ่งประกอบไปด้วยสมการปัวซองจำนวนสองสมการสำหรับการจัดในระนาบ และสมการการตัดของโครงสร้างแผ่นบางอีกหนึ่งสมการสำหรับการจัดตามขวาง จากนั้นคำตอบของสมการที่นำมาแทนที่นี้จะสร้างให้อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัลจากปัญหาของโปเทนเชียลและปัญหาการตัดของโครงสร้างแผ่นบาง ทำให้การสร้างและการคำนวณฟังก์ชันในสมการอินทิกรัลสามารถทำได้อย่างสะดวก ส่งผลให้การวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุนสามารถวิเคราะห์ได้โดยง่าย จากนั้นได้เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่คำนวณได้กับผลการวิเคราะห์แบบแม่นยำตรงจากงานวิจัยอื่นเพื่อประเมินความน่าเชื่อถือและความถูกต้อง อีกทั้งได้ศึกษาผลกระทบของความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุน ความหนาของโครงสร้างแผ่นบาง ลักษณะฐานรองรับในระนาบและอัตราส่วนปัวซองที่มีผลต่อแรงวิกฤตในระนาบ งานวิจัยนี้ยังได้ทำการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อนเพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีบาวนด์อาร์/โดเมนเอลิเมนต์

**คำสำคัญ:** การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบาง ฐานรากยึดหยุน บาวนด์อาร์เอลิเมนต์ โดเมนเอลิเมนต์ วิธีสมการแอนะล็อก



## Buckling Analysis of Thin Plates on Elastic Foundation by the Boundary/Domain Elements Method

Monchai Panyatong\*

Department of Civil and Environmental Engineering, Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiang Rai, Thailand

\* Corresponding Author, Tel. 0 5372 3979 Ext. 4401, E-mail: monchai\_art@mutl.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.03.006

Received 28 August 2019; Revised 7 October 2019; Accepted 17 October 2019; Published online: 30 March 2020

© 2020 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### Abstract

The aim of this paper is to develop the boundary/domain elements method to analyze the buckling of thin plates on elastic foundation. The boundary/domain elements method is established by using the Analog Equation Method (AEM). According to the AEM, the original governing differential equations are replaced by three uncoupled equations with fictitious sources under the same boundary conditions: two Poisson's equations for the membrane displacements and one plate equation for the transverse displacement. The solution of the actual problem is attained from the known integral representations of the solution of the potential and plate problems. Therefore, the kernels of the boundary and domain integral equations are conveniently established and readily calculated in such a way that the buckling of thin plates on elastic foundation can be easily analyzed. Subsequently, the reliability and accuracy of the boundary/domain elements method are evaluated by comparing the obtained results with the available exact solutions. The influences of the stiffness of elastic foundation, plate thickness, in-plane supports and Poisson's ratio on the critical load buckling are thoroughly studied. Finally, the application of the boundary/domain elements method is demonstrated by analyzing the plates with complex shapes.

**Keywords:** Buckling of Plates, Elastic Foundation, Boundary Element, Domain Element, Analog Equation Method

## 1. บทนำ

โครงสร้างแผ่นบางเป็นโครงสร้างที่มีความสำคัญทางด้านวิศวกรรมโครงสร้าง โดยโครงสร้างแผ่นบางสามารถนำมาประยุกต์ใช้งานในหลากหลายด้าน ยกตัวอย่างเช่น ฐานรากของอาคาร [1] แผ่นพื้นของทางหลวง [2] โครงสร้างของเรือ [3] อุปกรณ์ของอากาศยาน [4] แผงผลิตไฟฟ้าเพิโซอิเล็กทริก [5] เป็นต้น โครงสร้างแผ่นบางเป็นโครงสร้างสองมิติที่มีขนาดความหนาแน่นเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดในมิติอื่นๆ ในระหว่างการใช้งานโครงสร้างแผ่นบางมีโอกาสถูกแรงกระทำในระนาบซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะ อีกทั้งยังพบว่า การประยุกต์ใช้งานของโครงสร้างแผ่นบางมีการวางไว้บนฐานรากยึดหยุ่นเพื่อเพิ่มความแข็งแรงให้กับระบบโครงสร้าง ดังนั้นการประเมินหาขนาดของแรงวิกฤตในระนาบ (Critical Load Buckling) ที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่นจึงเป็นอีกปัญหาหนึ่งที่มีความสำคัญสำหรับวิศวกร จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่ามีการศึกษาการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางจำนวนมาก ยกตัวอย่างเช่น Lam และคณะ [6] ได้พัฒนาคำตอบแบบแม่นยำตรงสำหรับการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมวางบนฐานรากยึดหยุ่นแบบสองพารามิเตอร์ โดยโครงสร้างแผ่นบางที่ทำการวิเคราะห์จะมีฐานรองรับอย่างง่ายสองด้านตรงข้ามกัน ส่วนอีกสองด้านที่เหลือสามารถเป็นฐานรองรับแบบอื่นๆ Chinnaboon และคณะ [7] ได้วิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบต่างๆ โดยใช้วิธีปลดเอลิเมนต์บนพื้นฐานวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ จากการศึกษาพบว่า ผลที่ได้จากวิธีดังกล่าวมีความสอดคล้องกับผลที่ได้จากคำตอบแบบแม่นยำตรง Akhavan และคณะ [8] ได้พัฒนาคำตอบแบบแม่นยำตรงสำหรับการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมวางบนฐานรากยึดหยุ่นแบบสองพารามิเตอร์ โดยได้ใช้ทฤษฎีของ Mindlin ในการอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างแผ่นบาง จากการศึกษาพบว่า ค่าความแข็งแรงของ Winkler มีอิทธิพลต่อแรงวิกฤตในระนาบมากกว่าค่าความแข็งแรงของแรงเฉือนของฐานรากยึดหยุ่น Dehghan และ Baradaran [9] ได้พัฒนาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับวิธี Differential

Quadrature ในการแก้ปัญหาค่าเจาะจง (Eigenvalue Problem) ของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมวางบนฐานรากยึดหยุ่นแบบสองพารามิเตอร์ โดยโครงสร้างแผ่นบางได้พิจารณาเป็นโครงสร้างสามมิติซึ่งผลการวิเคราะห์ที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางแบบสองมิติ Thai และ Kim [10] ศึกษาการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางที่ทำจากวัสดุที่มีคุณสมบัติทางกลแปรผันตามความหนาของโครงสร้างแผ่นบาง (Functionally Graded Materials) และใช้ทฤษฎีโครงสร้างแผ่นบางที่พิจารณาผลของแรงเฉือนอันดับสาม (Third-order Shear Deformation Plate Theory) สำหรับอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างแผ่นบาง จากนั้นได้พัฒนาคำตอบแบบปิด (Close Solution) เพื่อศึกษาโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมที่มีฐานรองรับอย่างง่ายตรงข้ามกันและอีกสองด้านที่เหลือเป็นฐานรองรับแบบอื่นๆ จากการศึกษาพบว่า ค่าดัชนีของวัสดุ (Power Index) ที่สูงทำให้ขนาดของแรงวิกฤตในระนาบมีค่าลดลง ในงานวิจัยของ Yiotis และ Katsikadelis [11] ได้ทำการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่นแบบสองพารามิเตอร์ ซึ่งโครงสร้างแผ่นบางได้กำหนดให้มีความหนาปานกลางทำให้ต้องพิจารณาผลของแรงเฉือน และได้ใช้วิธีปลดเอลิเมนต์บนพื้นฐานของวิธีแอนะล็อกในการวิเคราะห์ จากนั้นได้เปรียบเทียบผลที่คำนวณได้กับผลจากคำตอบแบบแม่นยำตรงพบว่า มีความสอดคล้องกัน

ในทางปฏิบัติแล้วพบว่า โครงสร้างแผ่นบางที่ใช้งานจริงจะมีลักษณะรูปร่างและฐานรองรับที่ซับซ้อนทำให้ไม่สามารถหาคำตอบแบบแม่นยำตรงได้ จึงจำเป็นต้องพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางลักษณะดังกล่าว ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่น โดยวิธีที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างที่ซับซ้อนและฐานรองรับหลากหลายได้ วิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์ได้พัฒนาขึ้นจากวิธีสมการแอนะล็อก (Analog Equation Method) ซึ่งนำเสนอโดย Katsikadelis [12] โดยสมการอนุพันธ์ของปัญหาเดิมจะแทนที่ด้วยสมการปัวซอง

(Poisson’s Equation) จำนวนสองสมการและสมการการตัดของโครงสร้างแผ่นบาง (Plate Bending Equation) อีกหนึ่งสมการ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเดิม จากนั้นคำตอบของสมการที่นำมาแทนนี้จะเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัล (Integral Representation of the Solution) ซึ่งได้ใช้คำตอบพื้นฐานของสมการลาปลาซ (Laplace Equation) และสมการไบฮาร์โมนิก (Biharmonic Equation) ในการสร้างทำให้การคำนวณฟังก์ชันในสมการอินทิกรัลทำได้ง่ายสะดวก จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบผลที่คำนวณได้กับผลการวิเคราะห์แบบแม่นยำเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง งานวิจัยนี้ยังได้ศึกษาผลของความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่น ความหนาของโครงสร้างแผ่นบาง ลักษณะของฐานรองรับในระนาบและอัตราส่วนปัวซองที่มีผลต่อแรงวิกฤตในระนาบ และสุดท้ายได้ทำการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อนวางบนฐานรากยึดหยุ่นเพื่อแสดงให้เห็นประสิทธิภาพของวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์

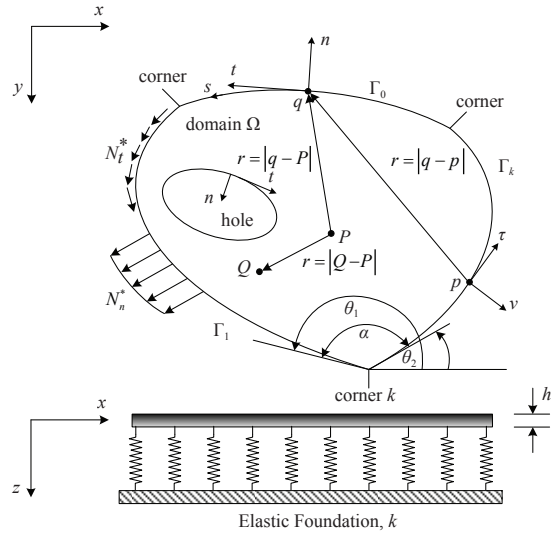
2. วิธีการวิจัย

2.1 สมการควบคุมสำหรับปัญหาการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่น

พิจารณาโครงสร้างแผ่นบางความหนาสม่ำเสมอ  $h$  ซึ่งมีโดเมน  $\Omega$  และล้อมรอบด้วยขอบเขต  $\Gamma \cup_{i=0}^{i=k} \Gamma_i$  วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่นที่มีค่าความแข็งแรง  $k$  นอกจากนี้ กำหนดให้โครงสร้างแผ่นบางถูกแรงกระทำในทิศตั้งฉาก  $N_n^*$  และทิศสัมผัส  $N_t^*$  ที่ขอบของโครงสร้างแผ่นบางแสดงดังรูปที่ 1 สมมุติให้โครงสร้างแผ่นบางทำจากวัสดุที่มีคุณสมบัติทางกลเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropic Material) และมีความยึดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linear Elastic Material) ดังนั้นเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Constitutive Relation) ได้ดังสมการที่ (1)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

เมื่อ  $E$  และ  $\nu$  คือมอดูลัสความยึดหยุ่นและอัตราส่วนปัวซอง



รูปที่ 1 โครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่นและสัญลักษณ์ต่างๆ ที่ใช้ในงานวิจัยนี้

ของโครงสร้างแผ่นบาง ตามลำดับ

สำหรับงานวิจัยนี้ พฤติกรรมการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางได้กำหนดให้เป็นไปตามทฤษฎีโครงสร้างแผ่นบางแบบคลาสสิก (Classical Plate Theory) จากทฤษฎีดังกล่าว สามารถแสดงการขจัด ณ ตำแหน่งใดๆ บนโครงสร้างแผ่นบางได้ด้วย

$$\bar{u} = u - z w_{,x} \quad (2)$$

$$\bar{v} = v - z w_{,y} \quad (3)$$

$$\bar{w} = w \quad (4)$$

โดยที่  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  และ  $w(x, y)$  คือการขจัด ณ ตำแหน่งใดๆ บนระนาบกลาง (Middle Plane) ของโครงสร้างแผ่นบางในทิศทาง  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ

จากความสัมพันธ์ของสมการที่ (2)–(4) สามารถแสดงความเครียดได้ดังสมการที่ (5)–(7)

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} - z w_{,xx} \quad (5)$$

$$\epsilon_{yy} = v_{,y} - z w_{,yy} \quad (6)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy}) \quad (7)$$

การสร้างสมการควบคุมสำหรับปัญหาการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางนั้นสามารถสร้างได้ด้วยการประยุกต์ใช้หลักการของงานเสมือน (Principle of Virtual Work) ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (8)

$$\delta U_P + \delta U_F + \delta V = 0 \quad (8)$$

เมื่อ  $\delta U_P$ ,  $\delta U_F$  และ  $\delta V$  คือพลังงานความเครียดของโครงสร้างแผ่นบางเสมือน พลังงานความเครียดที่สะสมในฐานรากยึดหยุ่นเสมือนและงานเสมือนเนื่องจากแรงกระทำตามลำดับ โดยที่พลังงานความเครียดของโครงสร้างแผ่นบางเสมือนแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ (9)

$$\delta U_P = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} \right) dz d\Omega \quad (9)$$

ในขณะที่พลังงานความเครียดที่สะสมในฐานรากยึดหยุ่นเสมือนแสดงได้ดังสมการที่ (10)

$$\delta U_F = \int_{\Omega} k w \delta w d\Omega \quad (10)$$

และงานเสมือนเนื่องจากแรงกระทำในระนาบที่ขอบของโครงสร้างแผ่นบาง  $N_n^*$  และ  $N_t^*$  แสดงได้ดังสมการที่ (11)

$$\delta V = - \int_{\Gamma} (N_n^* \delta u_n + N_t^* \delta u_t) ds \quad (11)$$

จากนั้นแทนสมการที่ (9)–(11) ลงในสมการที่ (8) และใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจากสมการที่ (1) รวมถึงความเครียดจากสมการที่ (5)–(7) ดำเนินการอินทิเกรตตลอดความหนาของโครงสร้างแผ่นบางร่วมกับการประยุกต์ใช้ทฤษฎีของ Gauss-Green จะได้สมการควบคุมของปัญหาดังต่อไปนี้

1.1) การขจัดในระนาบแสดงดังสมการที่ (12), (13)

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (12)$$

$$N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0 \quad (13)$$

1.2) การขจัดตามขวางแสดงดังสมการที่ (14)

$$\begin{aligned} & -M_{xx,xx} - 2M_{xy,xy} - M_{yy,yy} \\ & -N_{xx} w_{,xx} - 2N_{xy} w_{,xy} - N_{yy} w_{,yy} + k w = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

1) เงื่อนไขขอบเขตของการขจัดในระนาบแสดงดังสมการที่ (15), (16)

$$N_n = N_n^* \text{ หรือ } u_n = u_n^* \quad (15)$$

$$N_t = N_t^* \text{ หรือ } u_t = u_t^* \quad (16)$$

โดยที่ค่า  $u_n$ ,  $u_t$ ,  $N_n$  และ  $N_t$  แสดงได้ดังสมการที่ (17)–(20)

$$u_n = n_x u + n_y v \quad (17)$$

$$u_t = -n_y u + n_x v \quad (18)$$

$$N_n = C(u_{n,n} + \nu u_{t,t}) \quad (19)$$

$$N_t = \frac{C}{2}(1-\nu)(u_{n,t} + u_{t,n}) \quad (20)$$

เมื่อ  $C = Eh/(1-\nu^2)$  คือความแข็งแรงในระนาบ  $n_x$  และ  $n_y$  คือส่วนประกอบของเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย  $n$  (ดูในรูปที่ 1)

สำหรับเงื่อนไขของฐานรองรับในระนาบสามารถแบ่งออกได้ดังนี้

1.1) ฐานรองรับที่สามารถเคลื่อนที่ได้ในระนาบ (Moveable Support) แสดงดังสมการที่ (21)

$$N_n = N_n^* \text{ และ } N_t = N_t^* \quad (21)$$

1.2) ฐานรองรับที่ไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในระนาบ (Immovable Support) แสดงดังสมการที่ (22)

$$u_n = 0 \text{ และ } u_t = 0 \quad (22)$$

2) เงื่อนไขขอบเขตของการขจัดตามขวาง แสดงดังสมการที่ (23), (24)

$$V(w) + N_n^* w_{,n} + N_t^* w_{,t} = 0 \text{ หรือ } w = 0 \quad (23)$$

$$M(w) = 0 \text{ หรือ } w_{,n} = 0 \quad (24)$$



จากสมการที่ (23) และ (24) สามารถแสดงเงื่อนไขของฐานรองรับแบบต่างๆ ได้ดังนี้

2.1) ฐานรองรับอย่างง่าย (Simple Support) แสดงดังสมการที่ (25)

$$w = 0 \text{ และ } M(w) = 0 \quad (25)$$

2.2) ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Clamped Support) แสดงดังสมการที่ (26)

$$w = 0 \text{ และ } w_{,n} = 0 \quad (26)$$

2.3) ขอบอิสระ (Free Support) แสดงดังสมการที่ (27)

$$V(w) + N_n^* w_{,n} + N_t^* w_{,t} = 0 \text{ และ } M(w) = 0 \quad (27)$$

แรงในระนาบ  $N_{ij}$  และโมเมนต์  $M_{ij}(i,j=x,y)$  ที่ปรากฏในสมการที่ (12)–(14) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการขจัด ณ ตำแหน่งใดๆ บนระนาบกลางของโครงสร้างแผ่นบางได้ด้วยสมการที่ (28)–(33)

$$N_{xx} = C(u_{,x} + \nu v_{,y}) \quad (28)$$

$$N_{yy} = C(v_{,y} + \nu u_{,x}) \quad (29)$$

$$N_{xy} = \frac{C}{2}(1-\nu)(u_{,y} + v_{,x}) \quad (30)$$

$$M_{xx} = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad (31)$$

$$M_{yy} = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad (32)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy} \quad (33)$$

เมื่อ  $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$  คือความแข็งแกร่งของการตัด นอกจากนี้ ถ้าหากมุมของโครงสร้างแผ่นบางมีลักษณะเป็นปลายอิสระ (Free Support) เราจะต้องเพิ่มเงื่อนไขที่มุมดังนี้ [13] แสดงดังสมการที่ (34)

$$\|T(w)\| = 0 \text{ หรือ } w_c = 0 \quad (34)$$

ตัวดำเนินการ (Operators)  $V, M$  และ  $T$  ที่แสดงในสมการที่ (23), (24) และ (34) สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ (35)–(37)

$$V = -D \left( \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} - \kappa \frac{\partial}{\partial s} \right) \right) \quad (35)$$

$$M = -D \left( \nabla^2 + (\nu-1) \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial}{\partial n} \right) \right) \quad (36)$$

$$T = D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} - \kappa \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (37)$$

เมื่อ  $\kappa$  คือค่าความโค้งของขอบโครงสร้างแผ่นบาง การหาขนาดของแรงวิกฤตในระนาบที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะ แรงในระนาบ  $N_{ij}$  ในสมการที่ (14) จะถูกคูณด้วยพารามิเตอร์ของน้ำหนัก (Load Parameter,  $\lambda$ ) ซึ่งจะทำให้ปัญหาการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางกลายเป็นปัญหาค่าเจาะจง

สุดท้ายแทนสมการที่(28)–(33)ลงในสมการที่(12)–(14) ดังนั้นสมการควบคุมของปัญหาการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่นสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของการขจัด ณ ตำแหน่งใดๆ บนระนาบกลางของโครงสร้างแผ่นบางได้ดังนี้

1) การขจัดในระนาบ แสดงดังสมการที่ (38), (39)

$$\nabla^2 u + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}(u_{,xx} + v_{,yy}) = 0 \quad (38)$$

$$\nabla^2 v + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}(v_{,yy} + u_{,xx}) = 0 \quad (39)$$

2) การขจัดตามขวาง แสดงดังสมการที่ (40)

$$DV^4 w + kw - \lambda(N_{xx} w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_{yy} w_{,yy}) = 0 \quad (40)$$

ในเนื้อหาต่อไปจะนำเสนอรายละเอียดในการพัฒนาวิธี

บาวน์ดารี/โดเมนเอลิเมนต์ สำหรับการแก้ปัญหาค่าเจาะจง เพื่อหาขนาดของแรงวิกฤตในระนาบรวมถึงรูปร่างของการโก่งเตาะ (Mode Shapes)

## 2.2 วิธีบาวน์ดารี/โดเมนเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการโก่งเตาะของโครงสร้างแผ่นบาง

วิธีบาวน์ดารี/โดเมนเอลิเมนต์ที่นำเสนอในบทความนี้ได้พัฒนาขึ้นจากหลักการของวิธีสมการแอนะล็อก ซึ่งมีหลักการดังนี้ “สมการอนุพันธ์ใดๆ ซึ่งอาจเป็นแบบเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้น สามารถแทนที่ด้วยสมการอนุพันธ์อื่นที่มีอันดับ (Order) เดียวกันกับสมการอนุพันธ์เดิม ภายใต้แหล่งกำเนิดสมมุติ (Fictitious Source) โดยสมการที่แทนที่นี้เรียกว่าสมการแอนะล็อก”

จากหลักการดังกล่าว สามารถสร้างสมการแอนะล็อกที่สอดคล้องกับปัญหาการโก่งเตาะของโครงสร้างแผ่นบางได้ดังต่อไปนี้

### 1) การขจัดในระนาบ

พิจารณาสมการที่ (38) และ (39) ซึ่งพบว่า เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้น สมการแอนะล็อกจึงต้องเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองด้วย สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับสองที่อยู่ในรูปร่างง่ายและสามารถหาคำตอบได้อย่างสะดวกคือสมการปัวซง ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (41), (42)

$$\nabla^2 u = b^{(1)}(x, y), \text{ in } \Omega \quad (41)$$

$$\nabla^2 v = b^{(2)}(x, y), \text{ in } \Omega \quad (42)$$

เมื่อ  $b^{(1)}(x, y)$  และ  $b^{(2)}(x, y)$  คือแหล่งกำเนิดสมมุติและเป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบในตอนี้

คำตอบของสมการที่ (41) และ (42) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัล ได้ดังสมการที่ (43), (44)

$$\begin{aligned} \varepsilon u(p) = & -\int_{\Gamma} (v^* u_{,n} - u v_{,n}^*) ds \\ & + \int_{\Omega} v^* b^{(1)} d\Omega, \quad p \in \Omega \cup \Gamma \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon v(p) = & -\int_{\Gamma} (v^* v_{,n} - v v_{,n}^*) ds \\ & + \int_{\Omega} v^* b^{(2)} d\Omega, \quad p \in \Omega \cup \Gamma \end{aligned} \quad (44)$$

เมื่อ  $v^* = (\ln r) / 2\pi$  คือคำตอบพื้นฐาน (Fundamental Solution) ของสมการลาปลาซ และ  $v_{,n}^* = r_{,n} / 2\pi r$  คืออนุพันธ์ของคำตอบพื้นฐานตามเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย  $n$  ในขณะที่  $\varepsilon$  คือสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุด  $p$  โดยนิยามได้ดังสมการที่ (45)

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับจุด } p \equiv P \in \Omega \\ \alpha / 2\pi & \text{สำหรับจุด } p \in \Gamma \\ 0 & \text{สำหรับจุด } p \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (45)$$

นอกจากนี้ยังสามารถที่จะสร้างสมการอินทิกรัลเพิ่มเติมได้ด้วยกรอนุพันธ์สมการที่ (43) และ (44) ตามเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย  $\tau$  (ดูรูปที่ 1) สำหรับจุด  $p$  ที่วางบนขอบที่ต่อเนื่อง ( $\varepsilon = 1/2$ ) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (46), (47)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_{,\tau}(p) = & -\int_{\Gamma} (v_{,\tau}^* u_{,n} - v_{,nr}^* [u - u(p)]) ds \\ & + \int_{\Omega} v_{,\tau}^* b^{(1)} d\Omega \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v_{,\tau}(p) = & -\int_{\Gamma} (v_{,\tau}^* v_{,n} - v_{,nr}^* [v - v(p)]) ds \\ & + \int_{\Omega} v_{,\tau}^* b^{(2)} d\Omega \end{aligned} \quad (47)$$

สำหรับค่าอนุพันธ์ของการขจัดในระนาบของจุดที่อยู่ภายในโดเมน ( $\varepsilon = 1$ ) สามารถหาได้จากกรอนุพันธ์สมการที่ (43) และ (44) เช่นกัน โดยแสดงได้ดังสมการที่ (48), (49)

$$\begin{aligned} u_{,ab}(P) = & -\int_{\Gamma} (v_{,ab}^* u_{,n} - v_{,nab}^* u) ds \\ & + \int_{\Omega} v_{,ab}^* b^{(1)} d\Omega \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} v_{,ab}(P) = & -\int_{\Gamma} (v_{,ab}^* v_{,n} - v_{,nab}^* v) ds \\ & + \int_{\Omega} v_{,ab}^* b^{(2)} d\Omega \end{aligned} \quad (49)$$



เมื่อ  $a, b = x, y$  และจุด  $P \in \Omega$

พิจารณาปัญหาการขจัดในระนาบพบว่า มีตัวแปรที่ขอบของโครงสร้างแผ่นบางจำนวนทั้งหมด 6 ตัวแปร ได้แก่  $u, u_n, u_r, v, v_n$  และ  $v_r$  จากกระบวนการข้างต้นได้สร้างสมการที่ขอบของโครงสร้างแผ่นบางจำนวน 4 สมการ ได้แก่ สมการที่ (43), (44), (46) และ (47) รวมถึงจะทราบความสัมพันธ์ของเงื่อนไขพื้นฐานรองรับอีก 2 สมการ ได้แก่ สมการที่ (15) และ (16) รวมเป็นทั้งหมด 6 สมการ ดังนั้นจึงสามารถหาคำตอบของปัญหาการขจัดในระนาบได้และสามารถคำนวณแรงในระนาบ  $N_{ij}$  ได้จากสมการที่ (28)–(30)

## 2) การขจัดตามขวาง

พิจารณาสมการที่ (40) พบว่า เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสี่ จึงทำให้สมการแอนะล็อกต้องมีอันดับสี่เหมือนกัน ในงานวิจัยนี้จะประยุกต์ใช้สมการการตัดของโครงสร้างแผ่นบางที่มีแรงกระทำแบบกระจายเป็นสมการแอนะล็อก ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (50)

$$D\nabla^4 w = b^{(3)}(x, y), \quad \text{in } \Omega \quad (50)$$

เมื่อ  $b^{(3)}(x, y)$  คือแรงกระทำแบบกระจายสมมุติและเป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบในตอนนี และสามารถเขียนคำตอบของสมการที่ (50) ให้อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัล [13] ได้ดังสมการที่ (51)

$$\begin{aligned} \varepsilon w(p) = & \int_{\Gamma} \left( \begin{aligned} & w^* V(w) - w V(w^*) \\ & -w_n^* M(w) + w_n M(w^*) \end{aligned} \right) ds \\ & - \sum_k \left( w^* \|T(w)\|_k - w \|T(w^*)\|_k \right) \\ & + \int_{\Omega} w^* b^{(3)} d\Omega, \quad p \in \Omega \cup \Gamma \end{aligned} \quad (51)$$

โดยที่

$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$  คือคำตอบพื้นฐานของสมการไบฮาร์มอนิก

$w_n^* = r r_n (1 + 2 \ln r) / 8\pi D$  คืออนุพันธ์ของคำตอบพื้นฐานตามเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย  $n$

และ  $M(w^*)$ ,  $V(w^*)$  และ  $T(w^*)$  สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (52)–(54)

$$M(w^*) = -\frac{1}{8\pi} \left( \begin{aligned} & 2(1+\nu) \ln r + (3+\nu)r_n^2 \\ & + (1+3\nu)r_r^2 \end{aligned} \right) \quad (52)$$

$$V(w^*) = -\frac{1}{4\pi r} (2r_n + (1-\nu)(r_n - \kappa r)(r_n^2 - r_r^2)) \quad (53)$$

$$T(w^*) = \frac{1}{4\pi} (1-\nu)r_n r_r \quad (54)$$

นอกเหนือจากนี้ ยังสามารถสร้างสมการอินทิกรัลเพิ่มเติมได้ด้วยการอนุพันธ์สมการที่ (51) ตามเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย  $v$  (ดูรูปที่ 1) สำหรับจุด  $p$  ที่วางบนขอบที่ต่อเนื่อง ( $\varepsilon = 1/2$ ) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (55) [13]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_{,v}(p) = & \int_{\Gamma} \left( \begin{aligned} & w_{,v}^* V(w) - w V(w_{,v}^*) \\ & -w_{,nv}^* M(w) + w_{,n} M(w_{,v}^*) \end{aligned} \right) ds \\ & - \sum_k \left( w_{,v}^* \|T(w)\|_k - w \|T(w_{,v}^*)\|_k \right) \\ & + \int_{\Omega} w_{,v}^* b^{(3)} d\Omega \end{aligned} \quad (55)$$

สำหรับค่าอนุพันธ์ของการขจัดตามขวางของจุดที่อยู่ภายในโดเมน ( $\varepsilon = 1$ ) หาได้จากการอนุพันธ์ของสมการที่ (51) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (56)

$$\begin{aligned} w_{,abcd}(P) = & \int_{\Gamma} \left( \begin{aligned} & w_{,abcd}^* V(w) - w V(w_{,abcd}^*) \\ & -w_{,nabcd}^* M(w) + w_{,n} M(w_{,abcd}^*) \end{aligned} \right) ds \\ & - \sum_k \left( w_{,abcd}^* \|T(w)\|_k - w \|T(w_{,abcd}^*)\|_k \right) \\ & + \int_{\Omega} w_{,abcd}^* b^{(3)} d\Omega \end{aligned} \quad (56)$$

เมื่อ  $a, b, c, d = x, y$  และจุด  $P \in \Omega$

สำหรับปัญหาการขจัดตามขวางจะประกอบด้วยตัวแปรที่ขอบของโครงสร้างแผ่นบางจำนวน 4 ตัวแปร ได้แก่  $w, w_n, V(w)$  และ  $M(w)$  จากกระบวนการที่ผ่านมาได้สร้างสมการที่ขอบของโครงสร้างแผ่นบางจำนวน 2 สมการ ได้แก่ สมการที่ (51) และ (55) รวมถึงจะทราบเงื่อนไขพื้นฐานรองรับอีก 2 สมการ ได้แก่ สมการที่ (23) และ (24) รวมเป็น



ทั้งหมด 4 สมการ ซึ่งทำให้สามารถหาคำตอบของปัญหาการขจัดตามขวางได้

### 2.3 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การหาคำตอบของสมการอินทิกรัลที่ได้นำเสนอก่อนหน้านี้ประกอบไปด้วยเป็น 2 ส่วน คือ 1) บาวนด์ารีอินทิกรัล และ 2) โดเมนอินทิกรัล สำหรับบาวนด์ารีอินทิกรัลจะประยุกต์ใช้เทคนิคของวิธีบาวนด์ารีเอลิเมนต์ในการหาคำตอบ โดยบทความนี้ได้ใช้บาวนด์ารีเอลิเมนต์แบบคงที่ (Constant Element) เนื่องจากสะดวกในการหาคำตอบเมื่ออินทิกรัลอยู่ในสถานะเอกฐาน (Singular Integral) ส่วนการหาค่าโดเมนอินทิกรัลทำได้ด้วยการแบ่งโดเมนเป็นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม (Triangular Element) และจะกำหนดให้ค่าของแหล่งกำเนิดสมมุติ ( $b^{(l)}$ ,  $l=1,2,3$ ) ในแต่ละเอลิเมนต์เป็นค่าคงที่

กำหนดให้  $N$  เป็นจำนวนของบาวนด์ารีเอลิเมนต์ และ  $M$  เป็นจำนวนของโดเมนเอลิเมนต์ ซึ่งลักษณะของเอลิเมนต์ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2 โดยกระบวนการเชิงตัวเลขมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

#### 1) การขจัดในระนาบ

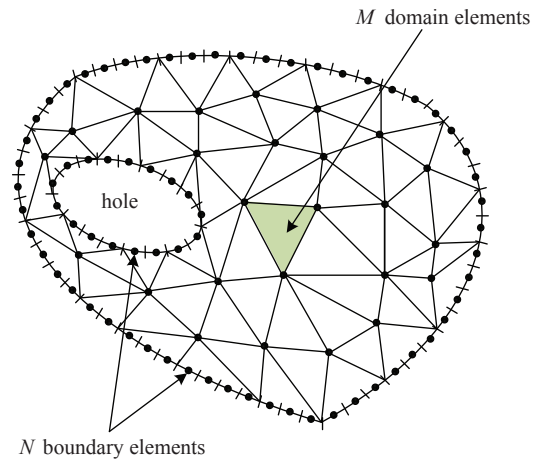
ดำเนินการสร้างระบบสมการด้วยการประยุกต์ใช้สมการที่ (43), (44), (46) และ (47) โดยวางจุด  $p$  ไว้ที่โหนด (Node) ของบาวนด์ารีเอลิเมนต์ (จุดกึ่งกลางของเอลิเมนต์) รวมถึงใช้เงื่อนไขขอบเขต (15) และ (16) จะได้ระบบสมการดังสมการที่ (57)

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{d}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_1 \quad (57)$$

โดยที่

$\mathbf{A}_1$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $6N \times 6N$  จากการอินทิเกรตของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับคำตอบพื้นฐาน  $v^*$  บนบาวนด์ารีเอลิเมนต์และสัมพันธ์จากเงื่อนไขขอบเขต

$\mathbf{x}_1 = [\mathbf{u}, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_r]^T$  คือเวกเตอร์ของตัวแปรบนขอบของโครงสร้างแผ่นบางซึ่งมีขนาด  $6N \times 1$   $\mathbf{d}_1$  คือเวกเตอร์ที่ทราบค่าขนาด  $6N \times 1$  ซึ่งเป็นปริมาณที่เกี่ยวข้องกับ



รูปที่ 2 ลักษณะของบาวนด์ารีและโดเมนเอลิเมนต์

แรงในระนาบที่กระทำที่ขอบของโครงสร้างแผ่นบาง

$\mathbf{C}_1$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $6N \times 2M$  ซึ่งเป็นปริมาณที่เกี่ยวข้องกับอินทิเกรตของคำตอบพื้นฐาน  $v^*$  บนโดเมนเอลิเมนต์

$\mathbf{b}_1 = [b^{(1)}, b^{(2)}]^T$  คือเวกเตอร์ของแหล่งกำเนิดสมมุติขนาด  $2M \times 1$

จากสมการที่ (57) สามารถแสดงเวกเตอร์ของตัวแปรบนขอบของโครงสร้างแผ่นบางให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ของแหล่งกำเนิดสมมุติ  $\mathbf{b}_1$  ได้ดังสมการที่ (58)

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{d}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{b}_1) \quad (58)$$

จากนั้นประยุกต์ใช้สมการที่ (48) และ (49) โดยวางจุด  $p$  ไว้ที่จุดเซนทรอยด์ของแต่ละโดเมนเอลิเมนต์ ดังนั้นสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ (59)–(60)

$$\bar{\mathbf{u}}_{,ab} = \mathbf{D}_{,ab}^{(1)} \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_{,ab}^{(1)} \mathbf{b}_1 \quad (59)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{,ab} = \mathbf{D}_{,ab}^{(2)} \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_{,ab}^{(2)} \mathbf{b}_1 \quad (60)$$

โดยที่

$\mathbf{D}_{,ab}^{(1)}$  และ  $\mathbf{D}_{,ab}^{(2)}$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $M \times 6N$  จากการอินทิเกรตของอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับคำตอบ



พื้นฐาน  $v^*$  บนบาวนด์รีเอลิเมนต์

$C_{,ab}^{(1)}$  และ  $C_{,ab}^{(2)}$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $M \times 2M$  ที่เกี่ยวข้องกับอินทิเกรตของอนุพันธ์ของคำตอบพื้นฐาน  $v^*$  บนโดเมนเอลิเมนต์ แทนสมการที่ (58) ลงในสมการที่ (59) และ (60) ซึ่งทำให้ค่าอนุพันธ์ของการจัดในระนาบสำหรับจุด  $p$  ภายในโดเมน สามารถเขียนอยู่ในรูปเวกเตอร์  $\mathbf{b}_1$  ได้ดังสมการที่ (61), (62)

$$\bar{\mathbf{u}}_{,ab} = \mathbf{U}_{,ab}^{(1)} \mathbf{b}_1 + \mathbf{U}_{,ab}^{(0)} \quad (61)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{,ab} = \mathbf{V}_{,ab}^{(1)} \mathbf{b}_1 + \mathbf{V}_{,ab}^{(0)} \quad (62)$$

แทนสมการที่ (61) และ (62) ลงในสมการที่ (38) และ (39) จะได้ระบบสมการเชิงเส้นดังสมการที่ (63)

$$\mathbf{S} \mathbf{b}_1 = \mathbf{g} \quad (63)$$

แก้ระบบสมการที่ (63) จนกระทั่งได้ค่าของเวกเตอร์  $\mathbf{b}_1$  หลังจากนั้นแทนเวกเตอร์  $\mathbf{b}_1$  ที่ได้ลงในสมการที่ (61) และ (62) ก็จะทราบค่าอนุพันธ์ของการจัดในระนาบภายในโดเมนของโครงสร้างแผ่นบาง ส่วนแรงในระนาบภายในโดเมนของโครงสร้างแผ่นบาง สามารถหาได้จากการแทนค่าอนุพันธ์ของการจัดในระนาบลงในสมการที่ (28)–(30)

#### 2) การจัดตามขวาง

ดำเนินการสร้างระบบสมการด้วยการประยุกต์ใช้สมการที่ (51) และ (55) โดยวางจุด  $p$  ไว้ที่โหนดของบาวนด์รีเอลิเมนต์และใช้เงื่อนไขขอบเขต (23) และ (24) จะได้ระบบสมการดังสมการที่ (64)

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{b}_2 \quad (64)$$

โดยที่

$\mathbf{A}_2$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $4N \times 4N$  จากการอินทิเกรตของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับคำตอบพื้นฐาน  $w^*$  บนบาวนด์รีเอลิเมนต์และสัมพันธ์จากเงื่อนไขขอบเขต

$$\mathbf{x}_2 = [\mathbf{w}, \mathbf{w}_{,n}, \mathbf{V}(\mathbf{w}), \mathbf{M}(\mathbf{w})]^T \text{ คือเวกเตอร์ของตัวแปร}$$

บนขอบของโครงสร้างแผ่นบางขนาด  $4N \times 1$

$\mathbf{C}_2$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $4N \times M$  ซึ่งเป็นปริมาณที่เกี่ยวข้องกับการอินทิเกรตคำตอบพื้นฐาน  $w^*$  บนโดเมนเอลิเมนต์

$\mathbf{b}_2 = \{b^{(3)}\}$  คือเวกเตอร์ของแรงกระทำแบบกระจายสมมติขนาด  $M \times 1$

จากสมการที่ (64) สามารถแสดงเวกเตอร์ของตัวแปรบนขอบของโครงสร้างแผ่นบางในรูปของเวกเตอร์ของแรงกระทำแบบกระจายสมมติ  $\mathbf{b}_2$  ได้ดังสมการที่ (65)

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{b}_2 \quad (65)$$

จากนั้นใช้สมการที่ (56) โดยวางจุด  $p$  ไว้ที่จุดเซนทรอยด์ของแต่ละโดเมนเอลิเมนต์ จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (66)

$$\bar{\mathbf{w}}_{,abcd} = \mathbf{D}_{,abcd}^{(3)} \mathbf{x}_2 + \mathbf{C}_{,abcd}^{(3)} \mathbf{b}_2 \quad (66)$$

โดยที่

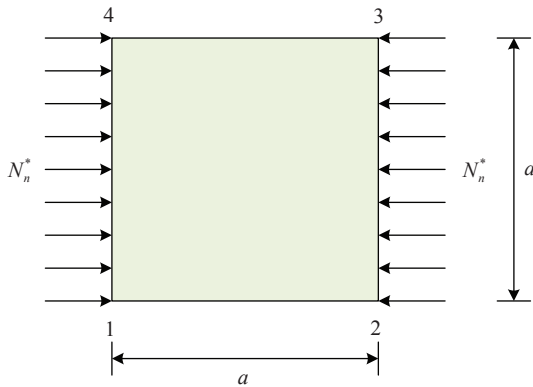
$\mathbf{D}_{,abcd}^{(3)}$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $M \times 4N$  จากการอินทิเกรตของอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับคำตอบพื้นฐาน  $w^*$  บนบาวนด์รีเอลิเมนต์

$\mathbf{C}_{,abcd}^{(3)}$  คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $M \times M$  ที่เกี่ยวข้องกับการอินทิเกรตคำตอบพื้นฐาน  $w^*$  บนโดเมนเอลิเมนต์แทนสมการที่ (65) ลงในสมการที่ (66) ดังนั้นเราสามารถแสดงอนุพันธ์ของการจัดตามขวางสำหรับจุด  $p$  ภายในโดเมนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์  $\mathbf{b}_2$  ได้ดังสมการที่ (67)

$$\bar{\mathbf{w}}_{,abcd} = \mathbf{W}_{,abcd}^{(1)} \mathbf{b}_2 \quad (67)$$

แทนสมการที่ (67) และแรงในระนาบภายในโดเมนที่หาได้ก่อนหน้านี้ลงในสมการที่ (40) ปัญหาการโค้งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่นจะกลายเป็นปัญหาค่าเจาะจงดังสมการที่ (68)

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G}) \mathbf{b}_2 = 0 \quad (68)$$



รูปที่ 3 โครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสถูกแรงกระทำในระนาบหนึ่งแกน

เมื่อ **K** และ **G** เป็นเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด  $M \times M$  แรงวิกฤตในระนาบหาได้จากค่าเฉพาะ  $\lambda$  ในขณะที่ลักษณะการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางหาได้จากการแทนเวกเตอร์  $\mathbf{b}_2$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์เฉพาะ (Eigen Vector) ลงในสมการที่ (67)

### 3. ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและอภิปรายผล

#### 3.1 การตรวจสอบความถูกต้อง

การตรวจสอบความถูกต้องของวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์จะดำเนินการโดยเปรียบเทียบผลของแรงวิกฤตในระนาบที่คำนวณได้กับผลงานวิจัยอื่นที่ผ่านมา โดยทำการวิเคราะห์ที่โครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $a \times a$  ซึ่งมีฐานรองรับแบบต่างๆ และถูกแรงกระทำในระนาบหนึ่งแกน (Uniaxial Load) แสดงดังรูปที่ 3 โดยได้กำหนดสัญลักษณ์ของฐานรองรับดังนี้

1. S หมายถึง ฐานรองรับอย่างง่าย
2. C หมายถึง ฐานรองรับแบบยึดแน่น
3. F หมายถึง ขอบอิสระ

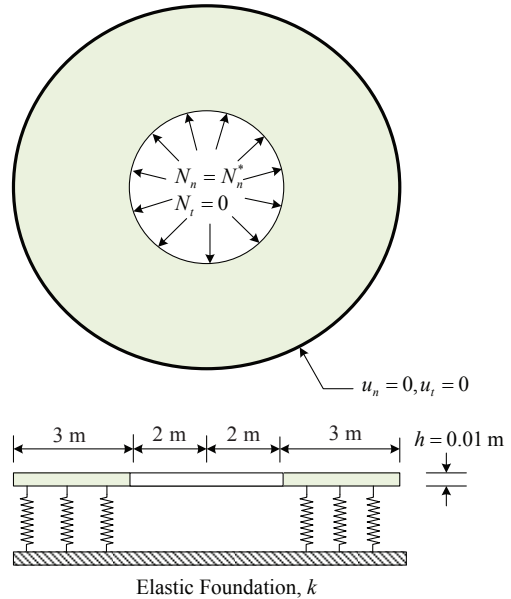
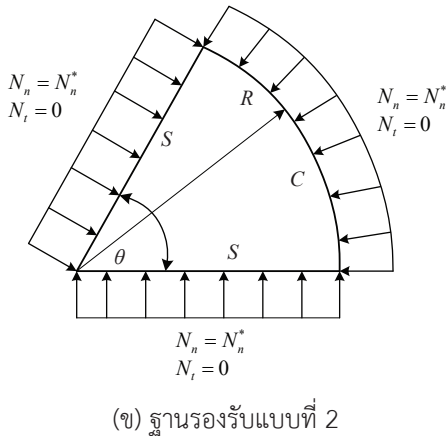
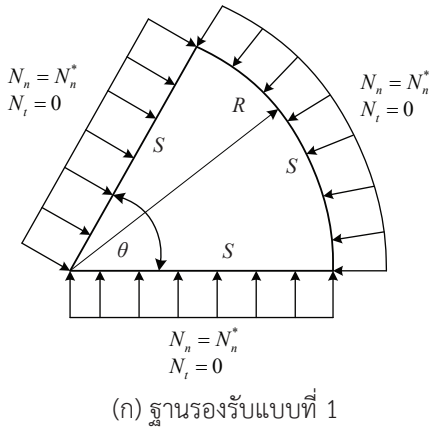
การให้ลำดับตำแหน่งของฐานรองรับจะให้ลำดับตำแหน่งของขอบ 1-2, 2-3, 3-4 และ 4-1 ตามลำดับ ยกตัวอย่างเช่น ฐานรองรับแบบ SCFS หมายถึง ขอบ 1-2 เป็นฐานรองรับอย่างง่าย ขอบ 2-3 เป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น ขอบ 3-4 เป็นขอบอิสระ และขอบ 4-1 เป็นฐานรองรับอย่างง่าย เป็นต้น

ตารางที่ 1 ผลการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของแรงวิกฤตในระนาบ  $\lambda_{cr} = N_{cr} a^2 / \pi^2 D$  สำหรับโครงสร้างแผ่นบางทั้งวางและไม่ได้วางบนฐานรากยึดหยุ่น

ลักษณะของฐานรองรับ	ค่าความแข็งแกร่งของฐานรากยึดหยุ่น $\bar{K} = \frac{k a^4}{D}$	Lam และคณะ [6]	งานวิจัยนี้
SSSS	0	4.000	3.976
	100	5.027	5.022
CSCS	0	7.691	7.722
	100	7.948	7.977
SSCS	0	5.740	5.685
	100	6.767	6.697
FSFS	0	0.952	0.953
	100	1.979	1.976
SSFS	0	1.402	1.433
	100	2.428	2.388

ตารางที่ 1 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของแรงวิกฤตในระนาบ  $\lambda_{cr}$  ระหว่างผลที่คำนวณได้กับผลการวิเคราะห์แบบแม่นยำตรงจากงานวิจัยของ Lam และคณะ [6] โดยการวิเคราะห์นี้ได้ใช้จำนวนบาวนด์รีเอลิเมนต์จำนวน 400 เอลิเมนต์ และโดเมนเอลิเมนต์จำนวน 250 เอลิเมนต์ จากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่าค่าที่วิเคราะห์ได้มีค่าใกล้เคียงกับผลการวิเคราะห์แบบแม่นยำตรง ดังนั้นสามารถยืนยันความถูกต้องของวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์

ต่อมาจะทำการวิเคราะห์ที่โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างแบบ Sectorial Shape แสดงดังรูปที่ 4 จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลจากการวิเคราะห์ด้วยวิธี Ritz Method [14] โดยได้แสดงผลการเปรียบเทียบดังตารางที่ 2 ซึ่งการวิเคราะห์ครั้งนี้ได้กำหนดให้อัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ 0.3 และอัตราส่วนความหนาต่อรัศมีของโครงสร้างแผ่นบางเท่ากับ 0.001 จากตารางที่ 2 จะเห็นได้ว่าผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์มีความสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์จากวิธี Ritz Method ซึ่งแสดง



รูปที่ 5 โครงสร้างแผ่นบางรูปวงแหวน

**รูปที่ 4** โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างแบบ Sectorial Shape

ให้เห็นว่าวิธีบาวนด์คาร์/โดเมนเอลิเมนต์สามารถวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างที่ซับซ้อนได้อย่างถูกต้อง

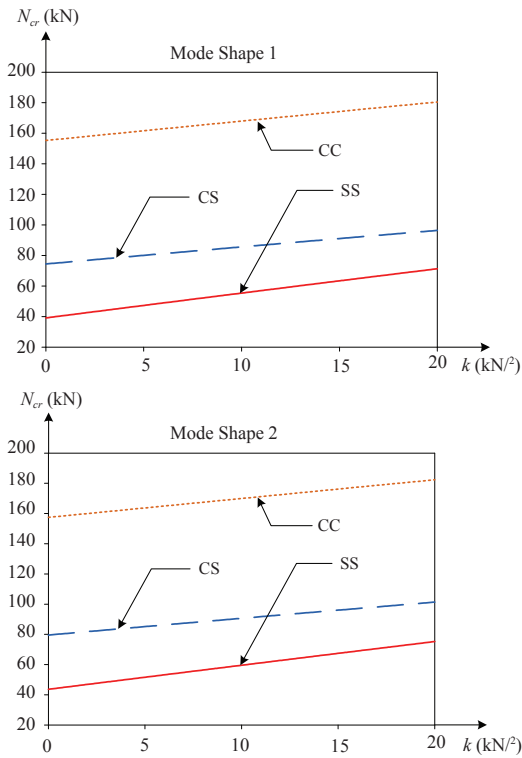
**ตารางที่ 2** ผลการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของแรงวิกฤติ ในระนาบ  $\lambda_{cr} = N_{cr} R^2 / D$  สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างแบบ Sectorial Shape

$\theta$	(a) ฐานรองรับแบบที่ 1		(b) ฐานรองรับแบบที่ 2	
	SSS		SCS	
	Wang และคณะ [14]	งานวิจัยนี้	Wang และคณะ [14]	งานวิจัยนี้
$\frac{\pi}{4}$	55.75	56.74	76.94	78.12
$\frac{\pi}{2}$	24.50	24.97	40.71	41.01
$\frac{3\pi}{4}$	16.44	16.71	31.00	30.88

**3.2 ผลของความแข็งแรงแรงของฐานรากยึดหยุ่นและความหนาของโครงสร้างแผ่นบางต่อการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางรูปวงแหวน**

เพื่อศึกษาผลของความแข็งแรงแรงของฐานรากยึดหยุ่นต่อการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบาง ได้ดำเนินการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางรูปวงแหวนแสดงดังรูปที่ 5 ซึ่งมีฐานรองรับแบบ SS, CS และ CC โดยสัญลักษณ์ตัวแรกหมายถึงชนิดของฐานรองรับขอบนอก และสัญลักษณ์ตัวที่สองหมายถึงชนิดของฐานรองรับขอบใน นอกจากนี้ได้กำหนดให้มอดุลัสความยืดหยุ่นของโครงสร้างแผ่นบางเท่ากับ  $200 \times 10^9$  นิวตันต่อตารางเมตร อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.30 และความหนาเท่ากับ 1 เซนติเมตร โดยการวิเคราะห์นี้ได้แบ่งจำนวนบาวนด์คาร์เอลิเมนต์จำนวน 400 เอลิเมนต์ และโดเมนเอลิเมนต์จำนวน 316 เอลิเมนต์

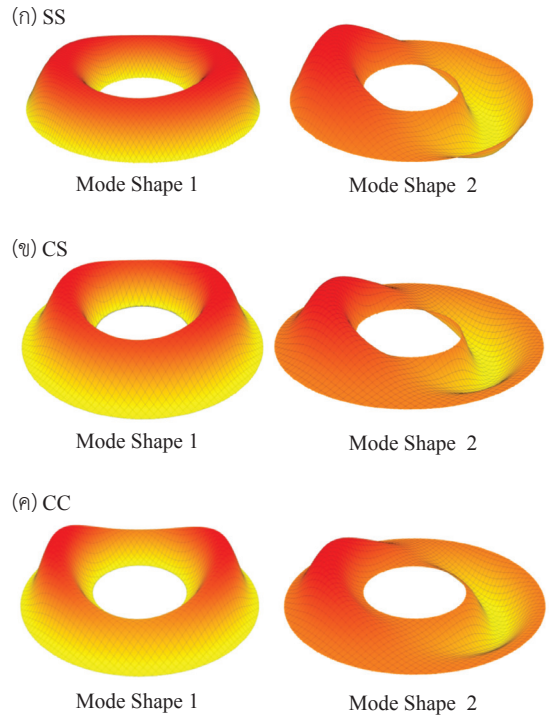
รูปที่ 6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงวิกฤติในระนาบกับความแข็งแรงแรงของฐานรากยึดหยุ่น ซึ่งเห็นได้ว่าเมื่อขนาดความแข็งแรงแรงของฐานรากยึดหยุ่นมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้แรงวิกฤติในระนาบมีค่าที่เพิ่มขึ้นตามไปด้วย จากผลข้างต้นกล่าวได้ว่าความแข็งแรงแรงของฐานรากยึดหยุ่นช่วยเพิ่มความ



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ของขนาดความแข็งแกร่งของฐานรากยึดหยุ่นกับแรงวิกฤตในระนาบ

แข็งแกร่งให้กับระบบของโครงสร้างแผ่นบาง ทั้งนี้ รูปร่างการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางในโหมดที่ 1 และ 2 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 7

ต่อมาจะทำการศึกษาผลของความหนาของโครงสร้างแผ่นบางต่อแรงวิกฤตในระนาบ โดยได้ทำการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางรูปวงแหวนที่มีความหนาต่างๆ จากนั้นนำผลที่ได้มาสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความหนากับขนาดของแรงวิกฤตในระนาบ ซึ่งในที่นี้จะนำเสนอในรูปของอัตราส่วนแรงวิกฤตในระนาบ  $R_{cr} = N_{cr} / N_{cr}^0$  โดยที่  $N_{cr}^0$  คือแรงวิกฤตในระนาบเมื่อความหนาของโครงสร้างแผ่นบางมีค่าเท่ากับ 1 เซนติเมตร และผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงไว้ในรูปที่ 8 จากรูปดังกล่าวพบว่า เมื่อความหนาของโครงสร้างแผ่นบางเพิ่มขึ้นจะทำให้ขนาดของแรงวิกฤตในระนาบมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วยและมีลักษณะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว โดยอัตราส่วนแรงวิกฤตในระนาบจะมีความสัมพันธ์กับความหนาเป็น  $R_{cr} = h^3$  เหมือนกัน

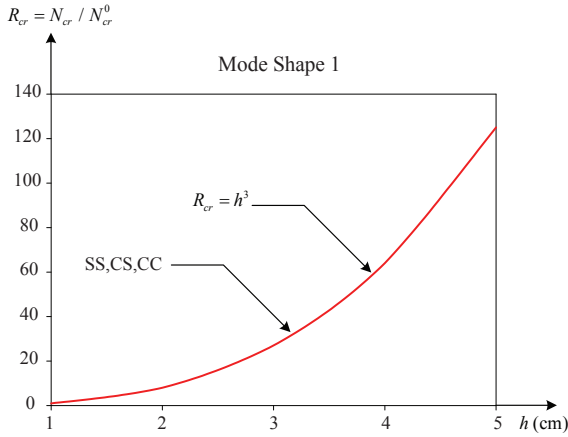


รูปที่ 7 รูปร่างการโก่งเดาะของแผ่นบางรูปวงแหวน

ทั้งสามชนิดฐานรองรับ เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของความหนาทำให้ค่าความแข็งแกร่งของโครงสร้างแผ่นบางมีค่าเพิ่มขึ้นและแปรผันโดยตรงกับความหนายกกำลังสาม จึงเป็นสาเหตุให้แรงวิกฤตในระนาบมีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่า หากฐานรองรับเป็นแบบ CC และ CS จะมีขนาดของแรงวิกฤตในระนาบเป็น 4 และ 1.9 เท่า (สำหรับรูปร่างการโก่งเดาะโหมดที่ 1) เมื่อเทียบกับฐานรองรับแบบ SS ดังนั้นในทางปฏิบัติสามารถเพิ่มความแข็งแกร่งให้กับโครงสร้างแผ่นบางได้ด้วยการเพิ่มความหนาหรือการออกแบบให้ฐานรองรับมีความแข็งแรงมากขึ้น

### 3.3 ผลของชนิดฐานรองรับในระนาบและอัตราส่วนปัวซองต่อการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบาง

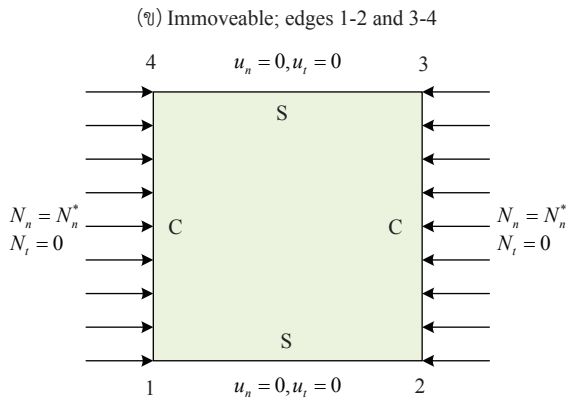
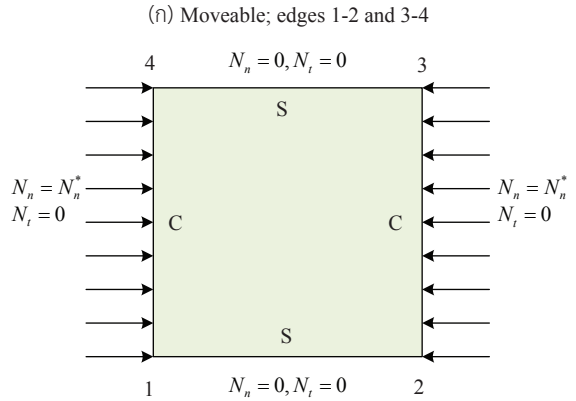
ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาค้นคว้าชนิดของฐานรองรับในระนาบต่อแรงวิกฤตในระนาบ โดยจะทำการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $10 \times 10$  เมตร



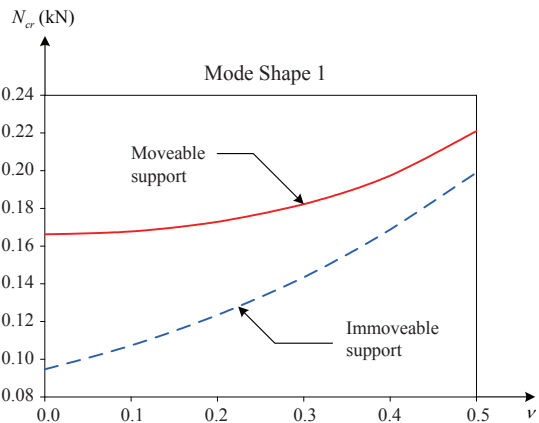
รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาของโครงสร้างแผ่นบางกับอัตราส่วนแรงวิกฤตในระนาบ

แสดงดังรูปที่ 9 โดยที่ขอบ 1-2 และ 3-4 เป็นฐานรองรับอย่างง่ายและจะกำหนดให้ฐานรองรับมีทั้งแบบเคลื่อนที่ได้และเคลื่อนที่ไม่ได้ในระนาบ ส่วนที่ขอบ 2-3 และ 4-1 ได้กำหนดให้เป็นฐานรองรับแบบยึดแน่นและเคลื่อนที่ได้ในระนาบ นอกจากนี้กำหนดให้ค่ามอดูลัสความยืดหยุ่นของโครงสร้างแผ่นบางเท่ากับ  $200 \times 10^9$  นิวตันต่อตารางเมตร และความหนาของโครงสร้างแผ่นบางเท่ากับ 1 เซนติเมตร

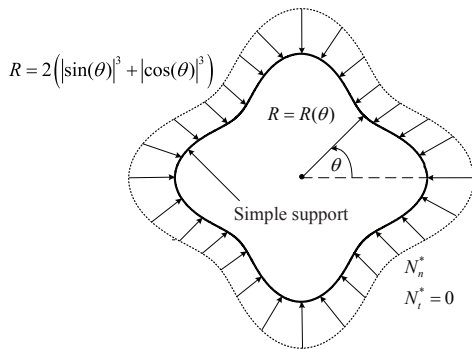
รูปที่ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนปัวซองกับขนาดของแรงวิกฤตในระนาบของโครงสร้างแผ่นบางสำหรับฐานรองรับในระนาบทั้งสองแบบ จากรูปดังกล่าวพบว่า โครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในระนาบมีขนาดของแรงวิกฤตในระนาบสูงกว่าโครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ไม่ได้ในระนาบ เนื่องจากฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ไม่ได้ในระนาบจะเกิดแรงปฏิกิริยาที่ขอบ 1-2 และ 3-4 ดังนั้นโครงสร้างแผ่นบางจะต้องรับภาระแรงกระทำในระนาบสองแกน (Biaxial Loads) เป็นผลให้โครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ไม่ได้ในระนาบมีค่าแรงวิกฤตในระนาบที่น้อยกว่า นอกจากนี้เมื่ออัตราส่วนปัวซองมีขนาดมากขึ้นพบว่า ขนาดของแรงวิกฤตในระนาบมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย เพราะการเพิ่มขึ้นของอัตราส่วนปัวซองทำให้ค่าความแข็งแแกร่งของโครงสร้างแผ่นบางมีค่าเพิ่มขึ้น โดยจะส่งผลอย่างมากต่อโครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ไม่ได้ในระนาบ



รูปที่ 9 โครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ที่ได้และไม่ได้ในระนาบบนขอบ 1-2 และ 3-4



รูปที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนปัวซองกับแรงวิกฤตในระนาบ



รูปที่ 11 โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อน (หน่วย: เมตร)

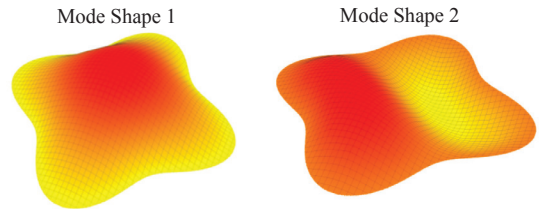
### 3.4 การวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างที่ซับซ้อน

เพื่อให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์ จะดำเนินการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อน ซึ่งถูกแรงในระนาบกระทำที่ขอบแสดงดังรูปที่ 11 โดยค่ามอดุลัสความยืดหยุ่นของโครงสร้างแผ่นบางเท่ากับ  $200 \times 10^9$  นิวตันต่อตารางเมตร อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ 0.30 และความหนาของโครงสร้างแผ่นบางเท่ากับ 1 เซนติเมตร ขณะที่ค่าความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่นกำหนดให้มีค่าเท่ากับ  $100 \times 10^3$  นิวตันต่อตารางเมตร จากการวิเคราะห์พบว่า ขนาดของแรงวิกฤตในระนาบมีค่าเท่ากับ 90 และ 118 กิโลนิวตัน สำหรับรูปร่างการโก่งเดาะในโหมดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ทั้งนี้ ได้แสดงรูปร่างการโก่งเดาะไว้ในรูปที่ 12

จากตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถเป็นเทคนิคที่ช่วยให้วิศวกรสามารถวิเคราะห์พฤติกรรมการโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความซับซ้อนได้ และจะเห็นได้ว่าคำตอบที่ได้จากวิธีนี้จะขึ้นอยู่กับอันดับของสมการอนุพันธ์เท่านั้น ดังนั้นวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาด้านวิศวกรรมอื่นๆ ที่มีอันดับของสมการอนุพันธ์เท่ากับ 2 และ/หรือ 4 ได้อย่างสะดวก

### 4. สรุป

การศึกษานี้ได้พัฒนาวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่น ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางที่มี



รูปที่ 12 รูปร่างการโก่งเดาะโหมดที่ 1 และ 2 ของ โครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อน

รูปร่างซับซ้อนได้ โดยวิธีบาวนด์รี/โดเมนเอลิเมนต์พัฒนาขึ้น จากวิธีสมการอนุพันธ์ จากหลักการของวิธีสมการอนุพันธ์ สมการอนุพันธ์ที่นำมาแทนที่สมการอนุพันธ์ของปัญหาเดิม ประกอบด้วย สมการปัวซองจำนวนสองสมการและสมการการตัดของโครงสร้างแผ่นบางอีกหนึ่งสมการ คำตอบของสมการที่นำมาแทนที่นี้สามารถเขียนในรูปของสมการอินทิกรัลจากปัญหาของโปเทนเชียลและปัญหาการตัดของโครงสร้างแผ่นบาง ทำให้การสร้างและการคำนวณฟังก์ชันในสมการอินทิกรัลสามารถทำได้อย่างสะดวก การวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่นจึงสามารถวิเคราะห์ได้โดยง่าย หลังจากนั้นได้ศึกษาผลของความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่น ความหนาของโครงสร้างแผ่นบาง ชนิดของฐานรองรับในระนาบและอัตราส่วนปัวซองที่มีต่อแรงวิกฤตในระนาบ โดยจากการศึกษานี้สามารถสรุปได้ดังนี้

1. เมื่อค่าความแข็งแรงของฐานรากยึดหยุ่นเพิ่มขึ้น จะส่งผลให้แรงวิกฤตในระนาบมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย
2. เมื่อความหนาของโครงสร้างแผ่นบางเพิ่มขึ้น จะทำให้ขนาดของแรงวิกฤตในระนาบมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย เพราะค่าความแข็งแรงของการตัดของโครงสร้างแผ่นบางมีค่าสูงขึ้นเนื่องจากความหนาที่เพิ่มขึ้น
3. โครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ไม่ได้ ในระนาบมีขนาดแรงวิกฤตในระนาบที่น้อยกว่าโครงสร้างแผ่นบางที่มีฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในระนาบ เนื่องจากต้องรับภาระน้ำหนักกระทำสองแกน
4. เมื่ออัตราส่วนปัวซองมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าความแข็งแรงของการตัดของโครงสร้างแผ่นบางเพิ่มขึ้นตาม ส่งผลให้ขนาดของแรงวิกฤตในระนาบเพิ่มขึ้นไปด้วย



5. วิธีบาวนด์คาร์รี/โดเมนเอลิเมนต์สามารถเป็นเทคนิคการวิเคราะห์การโก่งเดาะของโครงสร้างแผ่นบางวางบนฐานรากยึดหยุนที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างถูกต้อง

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] B. Mladenović, Z. Bonić, M. Mijalković, P. Dančević, and N. Davidović, "Application of mindlin's theory for analysis of footing plate bending based on experimental research," *Architecture and Civil Engineering*, vol. 8, no. 2, pp. 211–223, 2010.
- [2] N. Ogura, H. Yatsumoto, T. Nishida, and T. Shiotani, "Damage evaluation of an internal concrete in steel-plate bonded slabs with anchor-bolts," *Construction and Building Materials*, vol. 177, pp. 247–251, 2018.
- [3] M. Omidali and M. R. Khedmati, "Reliability-based design of stiffened plates in ship structures subject to wheel patch loading," *Thin-Walled Structures*, vol. 127, pp. 416–424, 2018.
- [4] C. Sravanthi and P. Dharmavarapu, "Inertia load analysis of structural element mounting plate for section-IV of an aerospace vehicle under pitching condition," *Materials Today: Proceedings*, vol. 5, no. 13, pp. 27225–27230, 2018.
- [5] L. D. Bo, P. Gardonio, D. E. Casagrande, and S. Saggini, "Smart panel with sweeping and switching piezoelectric patch vibration absorbers: Experimental results," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 120, pp. 308–325, 2019.
- [6] K. Y. Lam, C. M. Wang, and X. Q. He, "Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions," *Engineering Structures*, vol. 22, no. 4, pp. 364–378, 2000.
- [7] B. Chinnaboon, S. Chucheepsakul, and J. T. Katsikadelis, "A BEM-based meshless method for elastic buckling analysis of plates," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 7, no. 1, pp. 81–99, 2007.
- [8] H. Akhavan, S.H. Hashemi, H.R.D. Taher, A. Alibeigloo, and S. Vahabi, "Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis," *Computational Materials Sciences*, vol. 44, no. 3, pp. 968–978, 2009.
- [9] M. Dehghan and G. H. Baradaran, "Buckling and free vibration analysis of thick rectangular plates resting on elastic foundation using mixed finite element and differential quadrature method," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 6, pp. 2772–2784, 2011.
- [10] H. T. Thai and S. E. Kim, "Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 75, pp. 34–44, 2013.
- [11] A. J. Yiotis and J. T. Katsikadelis, "Buckling analysis of thick plates on biparametric elastic foundation: A MAEM solution," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 88, no. 1–2, pp. 83–95, 2018.
- [12] J. T. Katsikadelis, "The analog boundary integral equation method for nonlinear static and dynamic problem in continuum mechanics," *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 40, no. 4, pp. 961–984, 2002.
- [13] J. T. Katsikadelis, *The Boundary Element Method for Plate Analysis*, Amsterdam-Boston: Elsevier, 2014.
- [14] C. M. Wang, J. N. Reddy, and K. H. Lee, *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*, Amsterdam-Lausanne: Elsevier, 2000.