



## การวิเคราะห์การตัดของแผ่นพื้นหนาที่วางบนฐานรากยึดหยุ่นหลายชั้นโดยวิธีบาวตารีเอลิเมนต์

จิรพงศ์ ชนะดี บุญมี ชินนาบุญ\* และ สมชาย ชูชีพสกุล

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 2470 9147 อีเมล: boonme.chi@kmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.12.003

รับเมื่อ 15 พฤศจิกายน 2564 แก้ไขเมื่อ 3 มีนาคม 2565 ตอรับเมื่อ 5 เมษายน 2565 เผยแพร่ออนไลน์ 4 ธันวาคม 2566

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นหนาของมินด์ลินวางบนฐานรากยึดหยุ่นหลายชั้นโดยวิธีบาวตารีเอลิเมนต์ (BEM) การวิเคราะห์ปัญหาจะใช้หลักการของสมการแอนะล็อก ตามแนวคิดนี้ สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาเดิมจะถูกแทนที่ด้วยสมการปัวซองที่ถูกกระทำโดยแหล่งกำเนิดสมมติ และยังคงใช้เงื่อนไขที่ขอบเขตเดิม จากนั้นประยุกต์ใช้วิธีบาวตารีเอลิเมนต์เพื่อสร้างสมการปริพันธ์ของผลเฉลย และประมาณค่าแหล่งกำเนิดสมมติด้วยอนุกรมเรเดียลเบสิสฟังก์ชัน ในบทความนี้เรเดียลเบสิสฟังก์ชันที่ใช้ คือ Thin Plate Splines; TPS ขณะที่เทอมโดเมนอินทิกรัลจะถูกแปลงให้เป็นอินทิกรัลที่ขอบเขตโดยอาศัยเทคนิคของวิธีบาวตารีเอลิเมนต์ ผลเฉลยของปัญหาจึงหาได้จากสมการอินทิกรัลที่ขอบเขตซึ่งจะมีการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะที่ขอบเขตของปัญหาเท่านั้น จากการศึกษาสามารถสรุปประเด็นสำคัญได้ดังนี้ 1) การวิเคราะห์แผ่นพื้นโดยวิธีบาวตารีเอลิเมนต์มีความแม่นยำดีเยี่ยมเมื่อเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์ 2) เงื่อนไขที่รองรับส่งผลโดยตรงกับพฤติกรรมของแผ่นพื้นเนื่องจากค่าความแข็งของที่รองรับที่แตกต่างกัน 3) จำนวนชั้นของฐานรากยึดหยุ่นมีอิทธิพลต่อผลการคำนวณเชิงตัวเลขของการตอบสนองของโครงสร้าง และ 4) ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อน ผลการคำนวณจากวิธีบาวตารีเอลิเมนต์มีค่าสอดคล้องกับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

**คำสำคัญ:** วิธีบาวตารีเอลิเมนต์ วิธีสมการแอนะล็อก ฐานรากยึดหยุ่นหลายชั้น แผ่นพื้นหนามินด์ลิน เรเดียลเบสิสฟังก์ชัน

การอ้างอิงบทความ: จิรพงศ์ ชนะดี, บุญมี ชินนาบุญ และ สมชาย ชูชีพสกุล, “การวิเคราะห์การตัดของแผ่นพื้นหนาที่วางบนฐานรากยึดหยุ่นหลายชั้นโดยวิธีบาวตารีเอลิเมนต์,” วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, ปีที่ 34, ฉบับที่ 1, หน้า 1-15, เลขที่บทความ 241-085613, ม.ค.-มี.ค. 2567.



## Bending Analysis of Thick Plates on a Multi-Layered Elastic Foundation by Boundary Element Method

Jirapong Chanadee, Boonme Chinnaboon\* and Somchai Chucheeepsakul

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand

\* Corresponding Author, Tel. 0 2470 9147, E-mail: boonme.chi@kmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.12.003

Received 15 November 2021; Revised 3 March 2022; Accepted 5 April 2022; Published online: 4 December 2023

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### Abstract

In this paper, an analysis of the Mindlin plate on a multi-layered elastic foundation by Boundary Element Method (BEM) is presented. This analysis employed the principle of the analog equation. According to this concept, the governing differential equations of the original problem are replaced by Poisson's equations with fictitious sources under the same boundary conditions. Then the boundary element technique is applied to the established integral equations of solution. The radial basis function series is applied to approximate the fictitious sources. In this work, Thin Plate Splines (TPS) as the radial basis function are chosen. Domain integrals are converted to boundary integrals by employing boundary element technique. Consequently, the solutions of the problem are obtained by boundary integral equation in which the boundary of the problem is only discretized into elements. From this study, the results can be summarized as follows: 1) The results of the plate analyzed by the boundary element method compared with analytical solutions are excellent in terms of accuracy. 2) The boundary conditions directly affect behaviors of the plate structures. 3) A number of foundation layers have an influence on numerical results of structural responses. 4) In the analysis of plates with complex shapes, the results from the proposed method are in good agreement with those obtained from the finite element method.

**Keywords:** Boundary Element Method, Analog Equation Method, Multi-layered Elastic Foundation, Mindlin Plate Theory, Radial Basis Function

Please cite this article as: J. Chanadee, B. Chinnaboon, and S. Chucheeepsakul, "Bending analysis of thick plates on a multi-layered elastic foundation by boundary element method," *The Journal of KMUTNB*, vol. 34, no. 1, pp. 1-15, ID. 241-085613, Jan.-Mar. 2024 (in Thai).

## 1. บทนำ

แผ่นพื้นหนาวางบนฐานรากยึดหยุ่นมักพบได้ทั่วไปในงานทางด้านวิศวกรรม เช่น ถนนคอนกรีต ฐานรากแผ่ และพื้นชั้นล่าง เป็นต้น เป็นองค์อาคารที่ทำหน้าที่ในการรับแรงภายนอกโดยตรงและถ่ายแรงเข้าสู่องค์อาคารอื่นๆ จึงทำให้มีความสำคัญอย่างมากทางด้านวิศวกรรม

Mindlin [1] และ Reissner [2], [3] ได้ทำการเสนอทฤษฎีแผ่นพื้นที่ยึดถึงผลกระทบของการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนตามขวาง (Transverse Shear Deformation) สำหรับใช้วิเคราะห์แผ่นพื้นหนา ซึ่งแตกต่างกับทฤษฎีแผ่นพื้นของ Kirchhoff ที่จะพิจารณาการเสียรูปเนื่องจากการดัดเพียงอย่างเดียว ทำให้ทฤษฎีการวิเคราะห์แผ่นพื้นของ Kirchhoff มีความเหมาะสมน้อยกว่าทั้ง 2 ทฤษฎีข้างต้น ในการนำมาวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีความหนามากยิ่งขึ้น ทฤษฎีของ Mindlin และ Reissner มีความแตกต่างกันไม่มาก โดยถ้าไม่สนใจผลเนื่องจากหน่วยแรงตั้งฉากทิศตามขวางในทฤษฎีแผ่นพื้นของ Reissner และกำหนดค่าปรับแก้แรงเฉือนในทฤษฎีของ Mindlin เท่ากับ  $5/6$  จะทำให้ทั้งสองทฤษฎีมีความสอดคล้องกัน ซึ่งการศึกษาครั้งนี้จะเลือกใช้ทฤษฎีของ Mindlin มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์โดยทฤษฎีแผ่นพื้นของ Mindlin เริ่มต้นด้วยการกำหนดสมมติฐานว่าการเสียรูป ณ จุดกึ่งกลางระนาบมีคุณสมบัติเป็นเชิงเส้นตลอดความหนาของแผ่นพื้น ในขณะที่ตลอดความหนาของแผ่นพื้นไม่สามารถขยายออกได้ในทิศตามขวาง

ในปัจจุบันมีการพัฒนาแบบจำลองของพฤติกรรมฐานรากมากมาย ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากในการนำมาประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างและดินได้เนื่องจากพฤติกรรมของดินในความเป็นจริงมีความซับซ้อนเป็นอย่างมาก ซึ่งที่ผ่านมาวิจัยจะดำเนินการพัฒนาแบบจำลองไปในสามแนวทาง คือ 1) เริ่มจากการนำแบบจำลองที่เสนอโดย Winkler [4] มาทำให้ใกล้เคียงความเป็นจริงของธรรมชาติดินมากขึ้นโดยการสมมติปฏิสัมพันธ์บางอย่างระหว่างเอลิเมนต์ของสปริง หรือ 2) ดำเนินการโดยเริ่มต้นด้วยความต่อเนื่อง จากนั้นตั้งสมมติฐานอย่างง่ายที่เกี่ยวข้องกับการกระจัดและความเครียด และ 3) ดำเนินการโดยใช้ประโยชน์

จากการกระจายอนุกรมกำลัง โดยการศึกษาจะนำแบบจำลองฐานรากยึดหยุ่นที่มีอนุพันธ์ลำดับสูง ที่เปรียบเสมือนตัวแทนของชั้นดินที่มีจำนวนชั้นดินหลายชั้น ซึ่งพัฒนาโดยแนวทางที่สามซึ่งนำเสนอโดย Kerr [5] มาประยุกต์ใช้ และเพื่อทำให้ง่ายขึ้นจะสมมติว่าปฏิสัมพันธ์ระหว่างแต่ละเอลิเมนต์ของสปริงและปฏิสัมพันธ์ระหว่างผิวล่างของแผ่นพื้นและเอลิเมนต์สปริงชั้นบนสุดเป็นแบบพื้นผิวอิสระ

งานวิจัยมากมายแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้วิธีบาวตารีเอลิเมนต์ (Boundary Element Method; BEM) ศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาการดัดของแผ่นพื้นหนาตามทฤษฎีแผ่นพื้นของ Mindlin [6] และทฤษฎีของ Reissner [7], [8] และสำหรับปัญหาของแผ่นพื้นวางบนฐานรากยึดหยุ่น ในช่วงแรก Katsikadelis และ Armenakas [9] และ Balas และคณะ [10] ประยุกต์ BEM วิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นบางที่วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่น จากนั้น Costa และ Brebbia [11] ก็ประยุกต์ใช้ BEM ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นบางวางบนฐานรากยึดหยุ่นแบบ Winkler ซึ่งสูตรที่นำเสนอจะเกี่ยวข้องกับสมการคู่อินทิกรัลสองสมการและประยุกต์ใช้กับแผ่นพื้นที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ต่อมา Puttonen และ Varpasuo [12] ได้แสดงคำตอบพื้นฐานสำหรับแผ่นพื้นบางที่วางบนฐานรากยึดหยุ่นในรูปของอินทิกรัลฟูเรียร์-เบสเซล และ Bezine [13] ใช้คำตอบพื้นฐานสำหรับแผ่นพื้นบางในการวิเคราะห์แผ่นพื้นบางที่วางบนฐานรากยึดหยุ่น ซึ่งก็ยังมีข้อจำกัดอยู่ คือจำเป็นต้องมีเทอมอินทิกรัลในโดเมน ซึ่งไม่เป็นที่ต้องการในวิธี BEM แต่ Kamiya และ Sawaki [14] ก็ได้ประยุกต์ใช้วิธี Dual Reciprocity ในการหลีกเลี่ยงเทอมอินทิกรัลในโดเมน แต่วิธีการนี้ต้องการโหนดเพิ่มเติมภายในโดเมน นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์ใช้วิธี BEM กับปัญหาของแผ่นพื้นหนาวางบนฐานรากยึดหยุ่น งานวิจัย [15]-[17] เป็นการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาวางบนฐานรากยึดหยุ่นทั้งแบบ 1 และ 2 พารามิเตอร์ การศึกษาที่ผ่านมาดังที่กล่าวมาทั้งหมดแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธี BEM ในการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นที่มีเงื่อนไขต่างๆ ได้

การศึกษาในบทความนี้เป็นการประยุกต์ใช้ BEM วิเคราะห์การดัดของแผ่นพื้นหนาตามทฤษฎีของ Mindlin

ที่วางอยู่บนแบบจำลองฐานรากยืดหยุ่นที่มีลำดับสูง และเพื่อทำให้ง่ายขึ้นจึงมีการสมมติพฤติกรรมบางอย่างดังที่กล่าวไปในการศึกษาครั้งนี้อาศัยวิธีการสมการแอนะล็อก (Analog Equation Method) ของ Katsikadelis [18] ใช้ร่วมกับวิธี BEM ซึ่งจะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาแผ่นพื้น Mindlin ที่วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีลำดับสูง ถูกแทนที่ด้วยสมการปัวซอง (Poisson's Equation) สามสมการภายใต้แหล่งกำเนิดสมมติ (Fictitious Sources) และคงไว้ซึ่งเงื่อนไขที่ขอบเขตเดิม จากนั้นประยุกต์ใช้วิธี BEM กับสมการแอนะล็อกที่เป็นตัวแทนของปัญหาเดิมเพื่อหาคำตอบในรูปแบบอินทิกรัล ซึ่งโดเมนอินทิกรัลของแหล่งกำเนิดสมมติสามารถเปลี่ยนเป็นอินทิกรัลที่ขอบเขตได้โดยใช้เทคนิค Domain Meshless และประมาณค่าแหล่งกำเนิดสมมติด้วย Radial Basis Function Series; RBFS ดังนั้นคำตอบของปัญหาสามารถหาได้เมื่อคำตอบอยู่ในรูปแบบอินทิกรัลที่กระทำที่ขอบเขตทั้งหมด

## 2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

### 2.1 แบบจำลองฐานรากยืดหยุ่นที่เสนอโดย Kerr [5]

การศึกษาแถบเชิงยืดหยุ่นที่มีความยาวไม่จำกัดที่วางบนฐานรากยืดหยุ่นของ Bosson [19] ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงต้านทานของฐานราก ( $p(x)$ ) กับค่าการโก่งตัวที่บริเวณผิวด้านบนของฐานราก ( $w(x)$ ) ดังต่อไปนี้

$$\{2\sin^2(HL)\} p(x) = \frac{E_f}{1-\nu_f^2} [L \times \sin(HL) \cos(HL) + HL^2] w(x) \quad (1)$$

โดยที่อนุพันธ์ลำดับที่  $n$  คือ  $L^n = \frac{d^n(\cdot)}{dx^n}$  และ  $H$  คือ ความหนาของชั้นดินขณะ  $E_f$  และ  $\nu_f$  คือ มอดุลัสยืดหยุ่น และอัตราส่วนของปัวซองของฐานราก ตามลำดับ จากนั้น Kerr และ Rhines [5] ใช้อนุกรมกำลังในการกระจายฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยแทนค่า  $E_f/(1-\nu_f^2) = E^*$  ลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{H}{E^*} p'' - \frac{H^3}{3E^*} p'''' + \frac{2H^5}{45E^*} p'''' - \dots \\ & = w'' - \frac{H^2}{3} w'''' + \frac{H^4}{15} w'''' - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

เมื่อ  $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$

พิจารณาเทอมแรกของทั้งสองด้านในสมการที่ (2) และหาปริพันธ์โดยพิจารณาเงื่อนไข  $p(x) = 0$  เมื่อ  $w(x) = 0$  จะได้

$$p = \frac{E^*}{H} w \quad (3)$$

ดังนั้นเมื่อพิจารณาเฉพาะเทอม  $H$  ถึง  $H^2$  ของสมการที่ (2) จะได้

$$p = \frac{E^*}{H} w - \frac{E^* H}{3} w'' \quad (4)$$

ในที่นี้สมการที่ (3) สอดคล้องกับแบบจำลองฐานรากของ Winkler เมื่อ  $k = E_f/H(1-\nu_f^2)$  และสมการที่ (4) สอดคล้องกับแบบจำลองฐานรากของ Pasternak เมื่อ  $k = E_f/H(1-\nu_f^2)$  และ  $G = E_f H/3(1-\nu_f^2)$

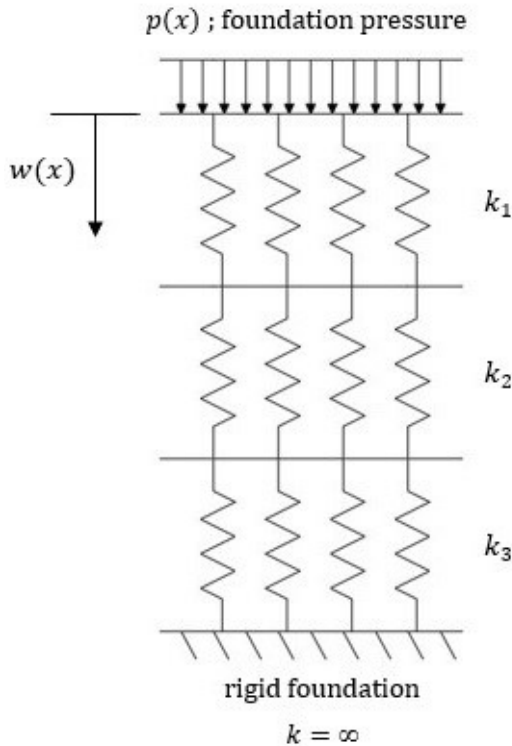
พิจารณาลำดับของ  $H$  ที่สูงขึ้น เช่น เทอม  $H$  ถึง  $H^4$  จะได้

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) p - \frac{G_L}{k_2} p'' \\ & = k_1 w - G_u \left(1 + \frac{k_1}{k_2} + \frac{G_L}{G_u}\right) w'' - \frac{G_u G_L}{k_2} w'''' \end{aligned} \quad (5)$$

โดยที่  $k_1$  และ  $k_2$  คือ มอดุลัสของฐานรากชั้นบนและชั้นล่างที่ติดกับชั้นแข็งแกร่ง (Rigid Foundation) ตามลำดับ  $G_u$  คือ ค่ามอดุลัสแรงเฉือนที่อยู่ระหว่างแผ่นพื้นและฐานรากชั้นบนสุด และ  $G_L$  คือ ค่ามอดุลัสแรงเฉือนที่อยู่ระหว่างฐานรากชั้นบนกับชั้นล่างที่ติดกับชั้นแข็งแกร่ง

เพื่อทำให้ง่ายขึ้น การศึกษาครั้งนี้จะพิจารณาให้พื้นผิวสัมผัสระหว่างชั้นของฐานรากเป็นพื้นผิวอิสระ (ไม่คิดผลจากค่ามอดุลัสแรงเฉือนระหว่างชั้นของฐานราก) ดังนั้นสมการที่ (5) จะได้

$$p = k_1 w / \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \quad (6)$$



รูปที่ 1 แบบจำลองฐานรากยืดหยุ่นแบบ 3 ชั้น

เมื่อกระทำแบบเดียวกันที่ทอม  $H$  ถึง  $H'$  จะได้ความสัมพันธ์แรงต้านทานจากฐานรากกับค่าการโก่งตัวของฐานรากแบบ 3 ชั้น ดังสมการที่ (7) และแสดงได้ดังรูปที่ 1

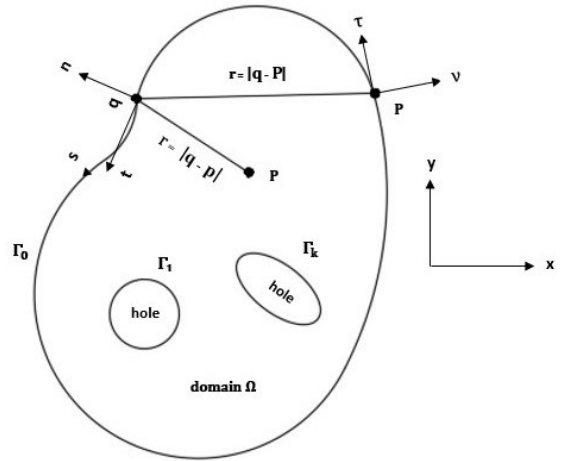
$$p = k_1 w / \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_1}{k_3} \right) \quad (7)$$

โดยที่  $k_1, k_2$  และ  $k_3$  คือ มอดุลัสของฐานรากชั้นบนสุดไปจนถึงชั้นล่างสุดที่ติดกับชั้นแข็งแแกร่ง ตามลำดับ

## 2.2 ทฤษฎีการตัดของแผ่นพื้นหนาตามสมมติฐานของ Mindlin ที่วางบนแบบจำลองฐานรากยืดหยุ่น

พิจารณารูปที่ 2 แผ่นพื้นหนารูปทรงใดๆ ที่มีความหนา  $h$  และวางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นระกอบไปด้วยโดเมน  $\Omega$  ของแผ่นพื้นและขอบเขต  $\Gamma_0$  ถึง  $\Gamma_k$  ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นปัญหาบนระนาบ  $xy$  ได้

จากสมมติฐานของ Mindlin หรือที่รู้จักในชื่อทฤษฎีการ



รูปที่ 2 รูปร่างของแผ่นพื้น ทิศทาง และสัญลักษณ์

เสีรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง (First-order Shear Deformation Plate Theory; FSDT) การกระจัดสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้ ดังนี้

$$u(x, y, z) = z \phi_x(x, y), \quad (8)$$

$$v(x, y, z) = z \phi_y(x, y), \quad (9)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (10)$$

เมื่อ  $u, v, w$  คือ การกระจัดในทิศทางตามแกน  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ ขณะที่  $\phi_x$  และ  $\phi_y$  คือ การหมุนรอบแกน  $y$  และ  $x$  ตามลำดับ

ความสัมพันธ์ของโมเมนต์และแรงเฉือนกับการเคลื่อนที่เป็นไปดังสมการที่ (11)–(15) โดย  $K_s$  คือค่าปรับแก้แรงเฉือน  $D$  คือ ค่าความแข็งต้านการตัดของแผ่นพื้น มีค่าเท่ากับ  $EH^3/12(1-\nu^2)$  และ  $G$  คือ ค่ามอดุลัสแรงเฉือน มีค่าเท่ากับ  $E/2(1+\nu)$  ขณะที่  $E, \nu$  และ  $h$  คือ มอดุลัสยืดหยุ่น อัตราส่วนปัวซอง และความหนาแผ่นพื้นตามลำดับ

$$M_x = D \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right), \quad (11)$$



$$M_y = D \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{1} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right), \quad (13)$$

$$Q_x = K_s Gh \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (14)$$

$$Q_y = K_s Gh \left( \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (15)$$

ค่าการหมุน โมเมนต์ และแรงเฉือนที่ขอบแสดงได้ดังสมการที่ (16)–(20)

$$\phi_n = n_x \phi_x + n_y \phi_y, \quad (16)$$

$$\phi_t = -n_y \phi_x + n_x \phi_y, \quad (17)$$

$$M_n = D \left( \frac{\partial \phi_n}{\partial n} + \nu \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right), \quad (18)$$

$$M_{nt} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \nu \frac{\partial \phi_t}{\partial n} \right), \quad (19)$$

$$Q_n = K_s Gh \left( \phi_n + \frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (20)$$

โดยที่  $M_n$ ,  $M_{nt}$  และ  $Q_n$  คือ โมเมนต์ดัด โมเมนต์บิด และแรงเฉือนที่บริเวณขอบเขต ตามลำดับ  $\phi_n$  และ  $\phi_t$  คือ การหมุนรอบแกน  $t$  และ  $n$  ตามลำดับ  $n_x = \cos\theta$  และ  $n_y = \sin\theta$  และ  $\theta$  คือมุมระหว่างแกน  $x$  และ  $n$  เป็นบวก เมื่อวัดในทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยเงื่อนไขที่รองรับบริเวณขอบแบ่งออกเป็น ที่รองรับแบบยึดแน่น ที่รองรับธรรมดาแบบอ่อน ที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง ที่รองรับแบบอิสระ ที่รองรับการเคลื่อนที่ยึดหยุ่น และที่รองรับการยึดรั้งยึดหยุ่น ซึ่งมีเงื่อนไขตามสมการที่ (21)–(26) ตามลำดับ

$$w = \phi_n = \phi_t = 0 \quad (21)$$

$$w = M_n = M_{nt} = 0 \quad (22)$$

$$w = M_n = \phi_t = 0 \quad (23)$$

$$Q_n = M_n = M_{nt} = 0 \quad (24)$$

$$Q_n = k_s w, M_n = M_{nt} = 0 \quad (25)$$

$$M_n = k_r \phi_n, w = \phi_t = 0 \quad (26)$$

โดยที่  $k_s$  และ  $k_r$  ของที่รองรับ ในสมการที่ (25)–(26) คือ สติฟเนสของการเคลื่อนที่และสติฟเนสของการหมุนตามลำดับ

สมการสมดุลของแผ่นพื้นหนาตามสมมติฐานของ Mindlin ที่วางบนฐานรากยึดหยุ่น เป็นดังนี้

$$-K_s Gh \left( \nabla^2 w + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) = q(x, y) - p_s(x, y), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \left[ (1-\nu)(\nabla^2 \phi_x) + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right] \\ & = K_s Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \left[ (1-\nu)(\nabla^2 \phi_y) + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right] \\ & = K_s Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \end{aligned} \quad (29)$$

โดยที่  $q(x, y)$  และ  $p_s(x, y)$  คือ แรงภายนอกในทิศทางตามขวางและแรงต้านทานจากฐานราก ตามลำดับ ขณะที่  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

### 2.3 การประยุกต์ใช้วิธีสมการแอนะล็อก

จากสมการสมดุลของปัญหาที่พิจารณา สมการที่ (27)–(29) สังเกตว่าอนุพันธ์ลำดับที่สองเป็นลำดับสูงสุด เมื่อกำหนดให้คำตอบของสามสมการ คือ  $w = w(x, y)$ ,  $\phi_x = \phi_x(x, y)$  และ  $\phi_y = \phi_y(x, y)$  ดังนั้นสมการแอนะล็อกที่เป็นตัวแทนของทั้งสามสมการคือ

$$\nabla^2 w = b^{(1)}(x, y) \quad (30)$$

$$\nabla^2 \phi_x = b^{(2)}(x, y) \quad (31)$$

$$\nabla^2 \phi_y = b^{(3)}(x, y) \quad (32)$$

โดยที่  $b^{(l)}$  คือ แหล่งกำเนิดสมมติ (Fictitious Sources) ซึ่งสมการแอนะล็อกสามารถดำเนินการหาคำตอบได้ด้วยวิธี BEM ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเต็ม โดยคำตอบจะอยู่ในรูปสมการอินทิกรัล คือ

$$\varepsilon w(p) = -\int_{\Gamma} (u^* w_{,n} - u^*_{,n} w) ds + \int_{\Omega} u^* b^{(1)} d\Omega \quad (33)$$

$$\varepsilon \phi_x(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{x,n} - u^*_{,n} \phi_x) ds + \int_{\Omega} u^* b^{(2)} d\Omega \quad (34)$$

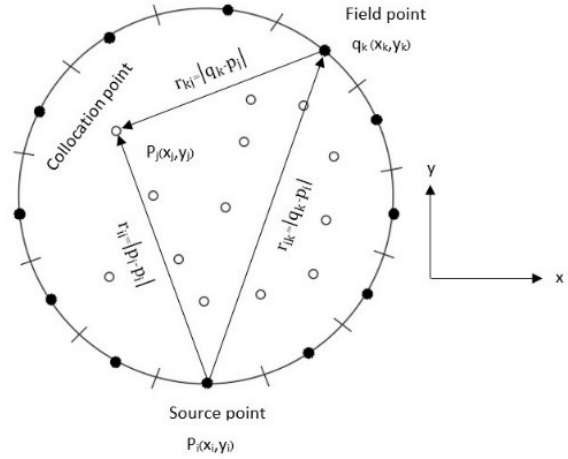
$$\varepsilon \phi_y(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{y,n} - u^*_{,n} \phi_y) ds + \int_{\Omega} u^* b^{(3)} d\Omega \quad (35)$$

โดย  $u^*$  คือ คำตอบพื้นฐานของสมการลาปลาซ มีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{2\pi} \ln r$  และเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2 ค่า  $r = |q_k - p|$  ในขณะที่ถ้า  $p \in \Omega$  แล้ว  $\varepsilon \in 1$  แต่เมื่อ  $p \in \Gamma$  และขอบเขตมีความเรียบ ค่า  $\varepsilon \in 0.5$  [6]

สังเกตสมการที่ (33)–(35) มีเทอมโดเมนอินทิกรัลที่มีแหล่งกำเนิดสมมติอยู่ภายใน สามารถแปลงเป็นอินทิกรัลที่ขอบโดยใช้เทคนิค Domain Meshless ประมาณค่าแหล่งกำเนิดสมมติด้วย Radial Basis Function series (RBFs) ซึ่งแหล่งกำเนิดสมมติสามารถประมาณค่าได้เป็น

$$b^{(l)} = \sum_{j=1}^M a_j^{(l)} f_j, \quad l = 1, 2, 3 \quad (36)$$

โดยที่  $f_j(r) = r^2 \ln r$  คือ  $M$  Radial-basis Functions ที่ประมาณโดย Thin Plate Splines; TPSs อยู่ที่บริเวณศูนย์กลางของโหนดภายใน (Collocation Points) และ  $M$  คือ จำนวนโหนดภายใน ขณะที่  $r = r_{ij} = |p_i - p_j|$  คือ ระยะทางระหว่างโหนดภายในและจุดแหล่งกำเนิดดังรูปที่ 3 และ  $a_j$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ที่ต้องการหา



รูปที่ 3 การแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบเขตและโหนดภายใน

จากทฤษฎีบทเอกลักษณ์ที่สองของกรีนส์ (Green's Second Identity) และกำหนด  $\hat{u}_j = \hat{u}_j(r_{ij}) = \hat{u}_j(x, y)$  เป็นคำตอบเฉพาะของ  $\nabla^2 \hat{u}_j = f_j$  ทำให้สามารถแปลงสมการโดเมนอินทิกรัลเป็นอินทิกรัลที่ขอบเขตได้ คำตอบที่ได้จะอยู่ในรูปอินทิกรัลที่ขอบเขตทั้งหมด คือ

$$\varepsilon w(p) = -\int_{\Gamma} (u^* w_{,n} - u^*_{,n} w) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u^*_{,n} \hat{u}_j) ds \right\} \quad (37)$$

$$\varepsilon \phi_x(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{x,n} - u^*_{,n} \phi_x) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u^*_{,n} \hat{u}_j) ds \right\} \quad (38)$$

$$\varepsilon \phi_y(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{y,n} - u^*_{,n} \phi_y) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u^*_{,n} \hat{u}_j) ds \right\} \quad (39)$$

เมื่อต้องการหาอนุพันธ์ของคำตอบที่ขอบในทิศทางสัมผัสกับขอบเขต  $\phi_{x,t}$  และ  $\phi_{y,t}$  กระทำได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการที่ (38) และ (39) ตามลำดับ เทียบกับ  $\tau$  โดยที่  $\tau = \{\tau_x, \tau_y\}^T$  ที่จุด  $p \in \Gamma$  ดังรูปที่ 2 จะได้



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_{x,\tau}(p) = & -\int_{\Gamma}(u_{,\tau}^*\phi_{x,n} - u_{,n\tau}^*[\phi_x - \phi_x(p)])ds \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \frac{1}{2}\hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma}(u_{,\tau}^*\hat{u}_{j,n})ds \right\} \\ & - \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \int_{\Gamma}(u_{,n\tau}^*[\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)])ds \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_{y,\tau}(p) = & -\int_{\Gamma}(u_{,\tau}^*\phi_{y,n} - u_{,n\tau}^*[\phi_y - \phi_y(p)])ds \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \frac{1}{2}\hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma}(u_{,\tau}^*\hat{u}_{j,n})ds \right\} \\ & - \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \int_{\Gamma}(u_{,n\tau}^*[\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)])ds \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

สำหรับคำตอบภายในโดเมนหาได้ด้วยการหาค่าอนุพันธ์โดยตรงสมการที่ (37)–(39) เมื่อ  $v, g = 0, x, y$  และ  $P \in \Omega$  จะได้

$$\begin{aligned} w_{,vg}(P) = & -\int_{\Gamma}(u_{,vg}^*w_{,n} - u_{,nvg}^*w)ds \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} [\hat{u}_{j,vg}(P)] \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left[ \int_{\Gamma}(u_{,vg}^*\hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^*\hat{u}_j)ds \right] \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{x,vg}(P) = & -\int_{\Gamma}(u_{,vg}^*\phi_{x,n} - u_{,nvg}^*\phi_x)ds \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} [\hat{u}_{j,vg}(P)] \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left[ \int_{\Gamma}(u_{,vg}^*\hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^*\hat{u}_j)ds \right] \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{y,vg}(P) = & -\int_{\Gamma}(u_{,vg}^*\phi_{y,n} - u_{,nvg}^*\phi_y)ds \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} [\hat{u}_{j,vg}(P)] \\ & + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left[ \int_{\Gamma}(u_{,vg}^*\hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^*\hat{u}_j)ds \right] \quad (44) \end{aligned}$$

จากสมการสมมูลของปัญหา สมการที่ (27)–(29) และ

สมการเงื่อนไขที่ขอบ สมการที่ (21)–(26) สังเกตว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่าที่ขอบเขต (Boundary) ทั้งหมด 8 ตัว ได้แก่  $w, w_{,n}, \phi_x, \phi_{x,n}, \phi_{x,\tau}, \phi_y, \phi_{y,n}$  และ  $\phi_{y,\tau}$  ในขณะที่เดียวกันมีสมการอยู่ 8 สมการ คือ 5 สมการจากสมการที่ (37)–(41) ที่พิจารณาเมื่อจุด  $p \in \Gamma$  และ 3 สมการจากเงื่อนไขที่ขอบเขตแต่ละแบบ สมการที่ (21)–(26) ทำให้สามารถหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ติดอยู่ในรูปสัมประสิทธิ์  $a_j$  ได้

ในที่สุดท้าย คือ หาค่าสัมประสิทธิ์  $a_j$  จากการนำคำตอบที่ได้จากสมการที่ (37)–(39) และ (42)–(44) ที่พิจารณาเมื่อ  $P \in \Omega$  แทนค่าลงไปในการสมมูลภายในโดเมนของปัญหา สมการที่ (27)–(29) ซึ่งจะช่วยให้ทราบค่าสัมประสิทธิ์  $a_j$

## 2.4 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

วิธี BEM ของการศึกษานี้ใช้เอลิเมนต์คงที่ (Constant Element) ในการประมาณค่าอินทิกรัลที่ขอบเขต และกำหนด  $N$  คือ จำนวนโหนดบนขอบเขต และ  $M$  คือ จำนวนโหนดภายในโดเมน

สมการคำตอบเมื่อจุด  $p \in \Gamma$  คือ สมการที่ (37)–(41) และสมการเงื่อนไขที่ขอบเขต สมการที่ (21)–(26) เขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$[A]\{x\} = \{B\} + [C]\{a\} \quad (45)$$

เมื่อ  $[A]$  คือ เมทริกซ์ของค่าปริพันธ์ของเคอร์เนล (Kernel) บนเอลิเมนต์ที่ขอบเขตและค่าสัมประสิทธิ์จากเงื่อนไขที่ขอบ ซึ่งมึขนาด  $8N \times 8N$  และ  $\{x\}$  คือ เมทริกซ์เวกเตอร์ของตัวแปรที่ขอบเขต มีขนาด  $8N \times 1$  ขณะที่  $\{B\}$  คือ เมทริกซ์เวกเตอร์ของค่าเทอมด้านขวาของสมการเงื่อนไขขอบเขต มีขนาด  $8N \times 1$  และ  $[C]$  คือ เมทริกซ์ของผลรวมสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $a_j$  มีขนาด  $8N \times 3M$  และสุดท้าย  $\{a\}$  คือ เมทริกซ์ของ  $a_j^{(l)}$  มีขนาด  $3M \times 1$

สมการคำตอบเมื่อจุด  $P \in \Omega$  คือ สมการที่ (37)–(39) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ตามลำดับ ดังนี้

$$\{w\} = [G^{(1)}]\{\bar{x}\} + [H^{(1)}]\{a_j^{(1)}\} \quad (46)$$



$$\{\phi_x\} = [G^{(2)}]\{\bar{x}_2\} + [H^{(2)}]\{a_j^{(2)}\} \quad (47)$$

$$\{\phi_y\} = [G^{(3)}]\{\bar{x}_3\} + [H^{(3)}]\{a_j^{(3)}\} \quad (48)$$

เมื่อ  $\{w\}$ ,  $\{\phi_x\}$ ,  $\{\phi_y\}$  คือ เมทริกซ์เวกเตอร์ของคำตอบการโก่งตัวและการหมุนภายในโดเมน มีขนาด  $M \times 1$  และ  $[G^{(1)}]$ ,  $[G^{(2)}]$ ,  $[G^{(3)}]$  คือ เมทริกซ์ค่าปริพันธ์ของเคอเนลล์บนเอลิเมนต์ที่ขอบเขตของสมการที่ (37)–(39) ตามลำดับ ซึ่งมีขนาดเมทริกซ์  $M \times 2N$  ในขณะที่  $\{\bar{x}_1\}$ ,  $\{\bar{x}_2\}$ ,  $\{\bar{x}_3\}$  คือ เมทริกซ์เวกเตอร์ขนาด  $2N \times 1$  ของตัวแปรที่บริเวณขอบเขต  $[w \ w_n]^T$ ,  $[\phi_x \ \phi_{x,n}]^T$  และ  $[\phi_y \ \phi_{y,n}]^T$  ตามลำดับ และ  $[H^{(1)}]$ ,  $[H^{(2)}]$ ,  $[H^{(3)}]$  คือ เมทริกซ์ของผลรวมสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $a_j^{(l)}$

เมื่อกระทำกระบวนการแบบเดียวกันที่จุด  $P \in \Omega$  ของสมการที่ (42)–(44) ทำให้ได้เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ของค่าการโก่งตัวและการหมุนภายในโดเมน จากนั้นแทนค่าการโก่งตัวและการหมุนภายในโดเมนซึ่งรวมถึงค่าอนุพันธ์ของค่าเหล่านี้ด้วย ลงไปในสมการสมดุลของปัญหาสมการที่ (27)–(29) เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์  $a_j^{(l)}$  และหลังจากนั้นก็เป็นการง่ายที่จะหาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นของปัญหา

### 3. ผลการทดลอง

การศึกษาจะแบ่งออกเป็น 5 ประเด็น คือ 1) ศึกษาความแม่นยำของวิธี BEM โดยการเทียบผลการคำนวณกับวิธีเชิงวิเคราะห์ 2) ศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นเมื่อเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขที่รองรับที่ขอบเขต 3) ศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นที่วางอยู่บนแบบจำลองฐานรากยึดหยุ่นที่มีหลายชั้น 4) ศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นที่วางอยู่บนแบบจำลองฐานรากยึดหยุ่นและมีเงื่อนไขที่ขอบเขตแบบผสม และ 5) ศึกษาการประยุกต์ใช้วิธี BEM กับแผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อนและวางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่น โดยเทียบคำตอบที่ได้กับโปรแกรมที่วิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากการศึกษาของ Chinnaboon [6] พบว่ารูปแบบตำแหน่งของจุดภายในโดเมนที่เป็นแบบสุ่มให้คำตอบที่ดีกว่า

รูปแบบตำแหน่งของจุดภายในโดเมนที่เป็นแบบสุ่มเหมาะสมเพียงเล็กน้อย ดังนั้นการศึกษาครั้งนี้จะเลือกใช้รูปแบบตำแหน่งของจุดภายในโดเมนแบบสุ่มทั้งหมด

### 3.1 ศึกษาความแม่นยำของผลการคำนวณจากวิธีบาวตารีเอลิเมนต์

พิจารณาแผ่นพื้นหนารับแรงกระจายสม่ำเสมอ  $q$  มีค่า  $\nu$  และ  $K_s$  เท่ากับ 0.3 และ 5/6 ตามลำดับ ค่าการโก่งตัวโมเมนต์ดัด และแรงเฉือนที่ได้จะถูกทำให้ไร้หน่วยด้วยสูตร  $\bar{w} = wD/qa^4$ ,  $\bar{M} = M/qa^2$  และ  $\bar{Q} = Q/qa$  ตามลำดับ เมื่อ  $a$  คือ ความยาวด้านของแผ่นพื้น

#### 3.1.1 แผ่นพื้นวงกลมหนา

แผ่นพื้นหนาวงกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง  $a$  ที่อัตราส่วนความหนาต่อความกว้าง ( $h/a$ ) ต่างๆ มีเงื่อนไขที่รองรับแบบยึดแน่น และพิจารณาใช้  $N=200$  และ  $M=763$  ค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางแผ่นพื้นที่ได้ แสดงดังตารางที่ 1 พบว่า คำตอบของงานวิจัยนี้เมื่อเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์ [20] มีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก เป็นการยืนยันว่าวิธีการเชิงตัวเลขนี้ มีประสิทธิภาพในการนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาแผ่นพื้นหนาได้เป็นอย่างดี

ตารางที่ 1 การโก่งตัวและโมเมนต์ที่กึ่งกลางแผ่นพื้นวงกลม

| $h/a$ | $\bar{w}$  |         | $\bar{M}_{xx} = \bar{M}_{yy}$ |         |
|-------|------------|---------|-------------------------------|---------|
|       | Exact [20] | Present | Exact [20]                    | Present |
| 0.10  | 0.01634    | 0.01639 | 0.08125                       | 0.08140 |
| 0.15  | 0.01723    | 0.01725 | 0.08125                       | 0.08133 |
| 0.20  | 0.01848    | 0.01849 | 0.08125                       | 0.08130 |
| 0.25  | 0.02009    | 0.02009 | 0.08125                       | 0.08128 |

#### 3.1.2 แผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสวางบนฐานรากยึดหยุ่นแบบ Winkler

พิจารณาแผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $a$  วางบนฐานรากยึดหยุ่นแบบ Winkler ที่อัตราส่วนความหนาต่อความกว้าง ( $h/a$ ) ต่างๆ โดยที่  $\bar{K}$  คือ มอดุลัสของฐานรากแบบไร้หน่วยมีค่าเท่ากับ  $(ka^4/D)^{1/4}$  ขณะที่พิจารณาเงื่อนไขที่รองรับ 2 แบบ คือ 1) ที่รองรับธรรมดาแบบแข็งทั้งสี่ด้าน

(SSSS) และ 2) ที่รองรับแบบแผ่นพื้น Lévy คือ สองด้านที่ตรงข้ามกันมีเงื่อนไขที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง และอีกสองด้านที่เหลือมีเงื่อนไขที่รองรับแบบยึดแน่น (SCSC) ซึ่งจำนวนโหนดบนขอบเขตและโหนดภายในที่ใช้ คือ  $N = 120$  และ  $M = 441$  ผลการโค้งตัวและโมเมนต์ที่กึ่งกลางแผ่นพื้นที่วิเคราะห์ได้แสดงดังตารางที่ 2 และ 3 ตามเงื่อนไขขอบเขตแบบ SSSS และ SCSC ตามลำดับ พบว่าคำตอบของวิจัยนี้เมื่อเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์ [21] มีค่าใกล้เคียงกันอย่างมาก

ตารางที่ 2 การโค้งตัวและโมเมนต์ตัดที่กึ่งกลางแผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีที่รองรับแบบ SSSS

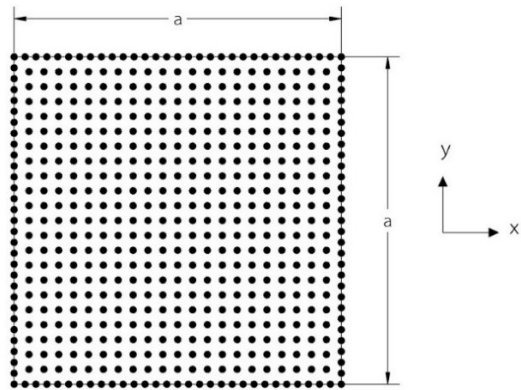
| h/a           | $\bar{w}$  |         | $\bar{M}_{xx} = \bar{M}_{yy}$ |         |
|---------------|------------|---------|-------------------------------|---------|
|               | Exact [21] | Present | Exact [21]                    | Present |
| $\bar{K} = 1$ |            |         |                               |         |
| 0.10          | 0.00426    | 0.00425 | 0.04774                       | 0.04768 |
| 0.15          | 0.00452    | 0.00452 | 0.04773                       | 0.04772 |
| 0.20          | 0.00489    | 0.00489 | 0.04772                       | 0.04773 |
| $\bar{K} = 3$ |            |         |                               |         |
| 0.10          | 0.00348    | 0.00348 | 0.03834                       | 0.03831 |
| 0.15          | 0.00365    | 0.00365 | 0.03784                       | 0.03784 |
| 0.20          | 0.00387    | 0.00388 | 0.03716                       | 0.03717 |

ตารางที่ 3 การโค้งตัวและโมเมนต์ตัดที่กึ่งกลางแผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีที่รองรับแบบ SCSC

| h/a           | $\bar{w}$  |         | $\bar{M}_{xx} = \bar{M}_{yy}$ |         |
|---------------|------------|---------|-------------------------------|---------|
|               | Exact [21] | Present | Exact [21]                    | Present |
| $\bar{K} = 1$ |            |         |                               |         |
| 0.10          | 0.00221    | 0.00222 | 0.02575                       | 0.02575 |
| 0.15          | 0.00255    | 0.00257 | 0.02728                       | 0.02733 |
| 0.20          | 0.00302    | 0.00303 | 0.02915                       | 0.02923 |
| $\bar{K} = 3$ |            |         |                               |         |
| 0.10          | 0.00198    | 0.00198 | 0.02272                       | 0.02271 |
| 0.15          | 0.00224    | 0.00226 | 0.02362                       | 0.02364 |
| 0.20          | 0.00259    | 0.00260 | 0.02463                       | 0.02468 |

### 3.2 การศึกษาเงื่อนไขจุดรองรับที่ขอบเขตแบบต่างๆ

พิจารณาแผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $a$  ที่วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่นแบบ Winkler อัตราส่วน  $h/a$  เท่ากับ 0.20 รับแรงกระจายสม่ำเสมอ  $q$  และมีค่า  $\nu$  และ  $K_s$  เท่ากับ



รูปที่ 4 ตำแหน่งโหนดที่ขอบเขตและโหนดภายใน  $N = 120$  และ  $M = 441$

0.3 และ 5/6 ตามลำดับ ขณะที่ค่า  $\bar{K}$  เท่ากับ 0.8429 โดยพิจารณาใช้  $N = 120$  และ  $M = 441$  ซึ่งการกระจายของโหนดแสดงดังรูปที่ 4 การศึกษานี้จะพิจารณาเงื่อนไขที่รองรับเหมือนกันทั้ง 4 ด้าน แบบต่างๆ คือ ที่รองรับแบบยึดแน่น (C) ที่รองรับธรรมดาแบบอ่อน (S') ที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง (S) ที่รองรับแบบอิสระ (F) ที่รองรับการเคลื่อนที่ยึดหยุ่น (T) และที่รองรับการยึดรั้งยึดหยุ่น (R) โดยที่ค่าสติเฟนสของการเคลื่อนที่และสติเฟนสของการหมุนแบบไร้หน่วยสามารถหาได้จาก  $\bar{k}_s = k_s (a^3 / D)$  และ  $\bar{k}_r = k_r (a / D)$  ตามลำดับ

ผลที่ได้แสดงดังตารางที่ 4 สังเกตว่าค่าการโค้งตัวโมเมนต์ตัด และแรงเฉือนที่เกิดขึ้นภายในแผ่นพื้นมีค่ามากที่สุดเมื่อแผ่นพื้นมีที่รองรับธรรมดาแบบอ่อน และมีค่าน้อยที่สุดเมื่อมีที่รองรับแบบยึดแน่น เนื่องจากจุดรองรับที่ขอบเขตก็เป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างแผ่นพื้นที่มีค่าความแข็งแตกต่างกันในแต่ละชนิดของที่รองรับ ดังนั้นจะเห็นว่าที่รองรับธรรมดาแบบอ่อนมีค่าความแข็งน้อยกว่าที่รองรับแบบยึดแน่น และกรณีเงื่อนไขที่รองรับการเคลื่อนที่ยึดหยุ่นเมื่อค่า  $\bar{k}_s = 0$  ผลที่ได้ตรงกับกรณีที่รองรับแบบอิสระ แต่เมื่อค่า  $\bar{k}_s = 10^7$  ผลที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับกรณีที่รองรับเงื่อนไขธรรมดาแบบอ่อน ในขณะที่กรณีที่รองรับการยึดรั้งยึดหยุ่น เมื่อค่า  $\bar{k}_r = 0$  ผลที่ได้ตรงกับกรณีเงื่อนไขที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง ในขณะที่กรณี  $\bar{k}_r = 10^3$  ผลที่ได้จะใกล้เคียงกับกรณีเงื่อนไขที่รองรับแบบยึดแน่น

**ตารางที่ 4** ผลการคำนวณของแผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสวางบนฐานรากแบบ Winkler ที่เงื่อนไขขอบเขตต่างๆ

| Boundary Condition       | $w$ at Center | $\bar{M}_{xx} = \bar{M}_{yy}$ at Center | $\bar{M}_{xy}$ at Corner | $\bar{Q}_x = \bar{Q}_y$ at Middle of Boundary |
|--------------------------|---------------|---|--------------------------|---|
| F                        | 2             | 0                                       | 0                        | 0   |
| S'                       | 0.0056        | 0.0545                                  | 0.0224                   | 0.4251  |
| S                        | 0.0049        | 0.0478                                  | 0.0531                   | 0.3394  |
| C                        | 0.0022        | 0.0236                                  | 0.0067                   | 0.3888  |
| T ( $\bar{k}_x = 0$ )    | 2             | 0                                       | 0                        | 0   |
| T ( $\bar{k}_x = 10^7$ ) | 0.0056        | 0.0545                                  | 0.0225                   | 0.4258  |
| R ( $\bar{k}_r = 0$ )    | 0.0049        | 0.0478                                  | 0.0531                   | 0.3384  |
| R ( $\bar{k}_r = 10^3$ ) | 0.0022        | 0.0239                                  | 0.0070                   | 0.3881  |

**ตารางที่ 5** กรณีสมมติค่ามอดุลัสของฐานรากแต่ละชั้น

| Case | $k_1$ (kN/m <sup>2</sup> /m) | $k_2$ (kN/m <sup>2</sup> /m) | $k_3$ (kN/m <sup>2</sup> /m) | $k_4$ (kN/m <sup>2</sup> /m) | $k_5$ (kN/m <sup>2</sup> /m) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1    | 40,000                       | $\infty$                     | $\infty$                     | $\infty$                     | $\infty$                     |
| 2    | 40,000                       | 80,000                       | $\infty$                     | $\infty$                     | $\infty$                     |
| 3    | 40,000                       | 80,000                       | 100,000                      | $\infty$                     | $\infty$                     |
| 4    | 40,000                       | 80,000                       | 100,000                      | 150,000                      | $\infty$                     |
| 5    | 40,000                       | 80,000                       | 100,000                      | 150,000                      | 200,000                      |

### 3.3 การศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นหนาที่วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่นหลายชั้น

พิจารณาแผ่นพื้นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 เมตร ความหนา 0.2 เมตร รับแรงกระจายสม่ำเสมอ 10,000 กิโลนิวตัน/ตารางเมตร มีที่รองรับธรรมดาแบบแข็งทั้งสี่ด้าน วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่นจำนวน 5 ชั้น โดยที่ค่า  $k_1, k_2, k_3, k_4$  และ  $k_5$  คือ มอดุลัสของฐานรากของชั้นบนสุดไปจนถึงชั้นล่างสุดตามลำดับ โดยตัวอย่างของแรงต้านทานจากฐานรากที่มี 2 และ 3 ชั้น เป็นดังสมการที่ (6) และ (7) ตามลำดับ และแผ่นพื้นมีค่า  $E$  เท่ากับ 24,855,572 กิโลนิวตัน/ตารางเมตร ในขณะที่ค่า  $\nu$  และ  $K_s$  เท่ากับ 0.3 และ 5/6 ตามลำดับ การวิเคราะห์จะใช้จำนวน  $N = 120$  และ  $M = 441$  และสมมติค่ามอดุลัสของฐานรากของทั้ง 5 ชั้น ออกเป็น 5 กรณี ดังตารางที่ 5 สังเกตว่ากรณีที่ 1 ไปจนถึงถึง 5 เปรียบเสมือนการพิจารณาจำนวนชั้นของฐานรากแบบ 1 ชั้น ไปจนถึง 5 ชั้น ตามลำดับ ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ของทั้ง 5 กรณีเป็นไปดังตารางที่ 6 ซึ่งผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าเมื่อพิจารณาจำนวนชั้นของฐานรากเพิ่มขึ้นค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางของแผ่นพื้น

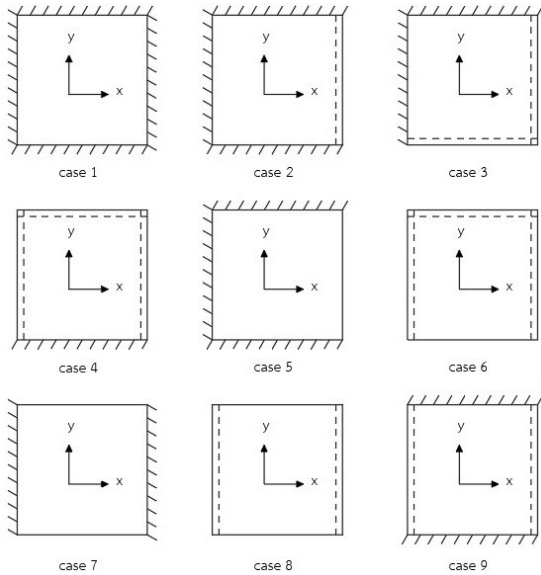
มีค่าเพิ่มขึ้น แต่ในทางตรงกันข้าม อัตราการเพิ่มขึ้นนั้นมีแนวโน้มลดลงอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งสังเกตได้ว่าการพิจารณาฐานรากเพียง 4 ชั้น ของกรณีที่ 4 ก็เพียงพอแล้วต่อการวิเคราะห์พฤติกรรมของแผ่นพื้นที่ยาวอยู่บนฐานรากยึดหยุ่น

**ตารางที่ 6** ค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางของแผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วางบนฐานรากยึดหยุ่น 5 ชั้น ในแต่ละกรณีของค่ามอดุลัสของฐานราก

| Case | $w$ (m)  | $\bar{M}_{xx} = \bar{M}_{yy}$ (kN-m/m) |
|------|----------|--|
| 1    | 0.002675 | 475.3                                  |
| 2    | 0.002682 | 476.5                                  |
| 3    | 0.002684 | 477.0                                  |
| 4    | 0.002686 | 477.3                                  |
| 5    | 0.002686 | 477.4                                  |

### 3.4 แผ่นพื้นหนาวางบนฐานรากยึดหยุ่นและมีเงื่อนไขขอบเขตแบบผสม

พิจารณาแผ่นพื้นหนาสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $a$  วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่นจำนวน 4 ชั้น โดยที่ค่า  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$  และ  $\bar{K}_4$



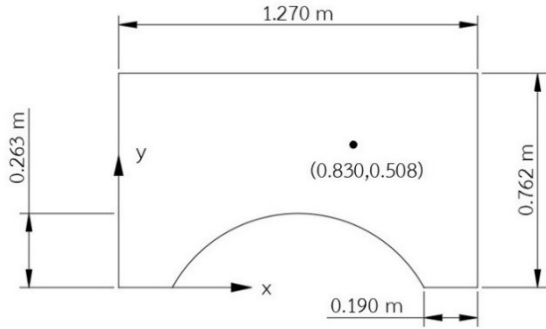
รูปที่ 5 กรณีเงื่อนไขที่ขอบเขตของแผ่นพื้น

คือ มอดุลัสของฐานรากแบบไร้หน่วยของชั้นบนสุดไปจนถึงชั้นล่างสุดและกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1.2, 1.4, 1.5 และ 1.7 ตามลำดับ แผ่นพื้นนี้รับแรงกระจายสม่ำเสมอ  $q$  อัตราส่วนความหนาต่อความกว้างเท่ากับ 0.20 ขณะที่ค่า  $\nu$  และ  $K_s$  เท่ากับ 0.3 และ  $5/6$  ตามลำดับ

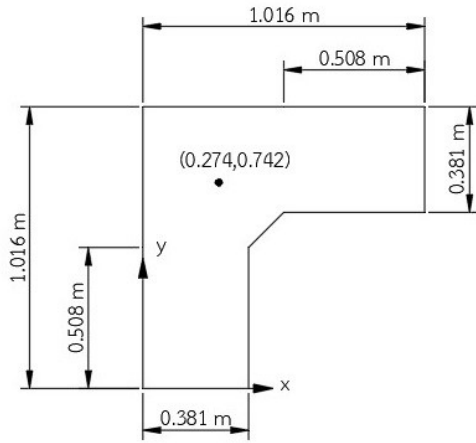
เงื่อนไขที่ขอบเขตของแผ่นพื้นแบ่งออกเป็น 9 กรณี ซึ่งเป็นการผสมกันระหว่างเงื่อนไขที่รองรับแบบยึดแน่น (C) เงื่อนไขที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง (S) และเงื่อนไขที่รองรับแบบอิสระ (F) แสดงแต่ละกรณีได้ดังรูปที่ 5 และในการวิเคราะห์ครั้งนี้กำหนดให้ค่า  $N = 120$  และ  $M = 441$  ซึ่งผลที่ได้ของค่าการโก่งตัว โมเมนต์ดัด โมเมนต์บิด และแรงเฉือนแบบไร้หน่วยที่เกิดขึ้นบริเวณกึ่งกลางแผ่นพื้น แสดงดังตารางที่ 7 ซึ่งผลการศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเป็นเกณฑ์มาตรฐานไว้ใช้ในการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีอื่นสำหรับงานวิจัยในอนาคต

### 3.5 การประยุกต์ใช้วิธีกับแผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อนและวางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่น

รูปร่างและเงื่อนไขของแผ่นพื้นทั่วไป 1 และ 2 แสดงดังรูปที่ 6 และ 7 ตามลำดับ และแผ่นพื้นทั้งสองมีที่รองรับ



รูปที่ 6 แผ่นพื้นรูปร่างทั่วไป 1



รูปที่ 7 แผ่นพื้นรูปร่างทั่วไป 2

ทุกด้านเป็นแบบยึดแน่นวางบนฐานรากยึดหยุ่นจำนวน 4 ชั้น โดยที่ค่า  $k_1, k_2, k_3$  และ  $k_4$  คือ มอดุลัสของฐานรากของชั้นบนสุดไปจนถึงชั้นล่างสุด มีค่าเท่ากับ 40,000, 80,000, 100,000 และ 150,000 กิโลนิวตันต่อลูกบาศก์เมตรตามลำดับ และพิจารณาแผ่นพื้นที่ความหนาขนาดต่างๆ มีมอดุลัสยึดหยุ่น 24,855,572 กิโลนิวตัน/ตารางเมตรรับแรงกระจายสม่ำเสมอขนาด 6,895 กิโลนิวตัน/ตารางเมตร ขณะที่ค่า  $\nu$  และ  $K_s$  เท่ากับ 0.3 และ  $5/6$  ตามลำดับ แผ่นพื้นทั่วไป 1 พิจารณาใช้  $N = 165$  และ  $M = 413$  แผ่นพื้นทั่วไป 2 ใช้  $N = 125$  และ  $M = 375$

ผลที่ได้ของค่าการโก่งตัวสูงสุดสำหรับแผ่นพื้นทั่วไป 1 และ 2 ที่ขนาดความหนาต่างๆ เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการโปรแกรม Ansys แสดงได้ดังตารางที่ 8 และ 9

**ตารางที่ 7** ค่าการโก่งตัว โมเมนต์ดัด โมเมนต์บิด และแรงเฉือนที่กึ่งกลางแผ่นพื้นในแต่ละกรณีเงื่อนไขที่ขอบเขตแบบผสม

| Case | $\bar{w}$ | $\bar{M}_{xx}$ | $\bar{M}_{yy}$ | $\bar{M}_{xy}$ | $\bar{Q}_x$ | $\bar{Q}_y$ |
|------|-----------|----------------|----------------|----------------|-------------|-------------|
| 1    | 0.002169  | 0.024          | 0.024          | 0.0000         | 0.000       | 0.000       |
| 2    | 0.002565  | 0.026          | 0.028          | 0.0000         | 0.033       | 0.000       |
| 3    | 0.003124  | 0.032          | 0.032          | 0.0001         | 0.040       | -0.040      |
| 4    | 0.003824  | 0.037          | 0.039          | 0.0000         | 0.000       | 0.050       |
| 5    | 0.003030  | 0.016          | 0.032          | 0.0000         | 0.035       | 0.000       |
| 6    | 0.008848  | 0.078          | 0.037          | 0.0000         | 0.000       | -0.054      |
| 7    | 0.003965  | 0.041          | 0.011          | 0.0000         | 0.000       | 0.000       |
| 8    | 0.014124  | 0.119          | 0.024          | 0.0000         | 0.000       | 0.000       |
| 9    | 0.003032  | 0.029          | 0.033          | 0.0000         | 0.000       | 0.000       |

ตามลำดับ ซึ่งผลจากโปรแกรม Ansys ของแผ่นพื้นทั่วไป 1 และ 2 แสดงได้ดังรูปที่ 8 และ 9 ตามลำดับ โดยบริเวณที่เกิดค่าการโก่งตัวสูงสุดของแผ่นพื้นทั่วไป 1 และ 2 อยู่ที่ตำแหน่ง (0.830, 0.508) และ (0.274, 0.742) ตามลำดับ

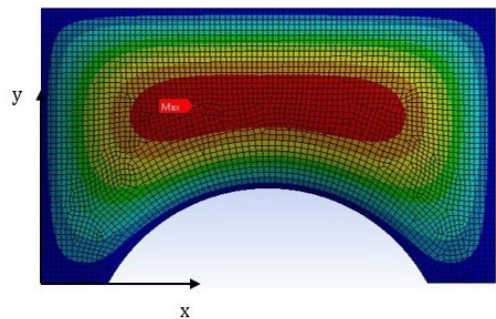
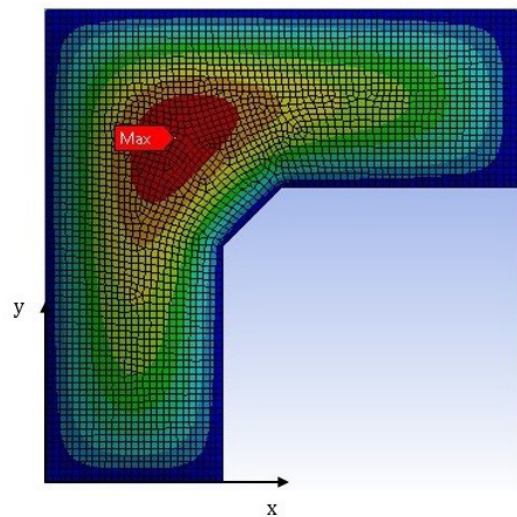
**ตารางที่ 8** การโก่งตัวสูงสุดของแผ่นพื้นทั่วไป 1

| $h$<br>(m) | $w_{max}/h$<br>Present | $w_{max}/h$<br>FEM | %diff |
|------------|------------------------|--------------------|-------|
| 0.127      | 0.00419                | 0.00430            | 2.627 |
| 0.190      | 0.00131                | 0.00131            | 0.284 |
| 0.254      | 0.00063                | 0.00062            | 2.196 |
| 0.318      | 0.00037                | 0.00036            | 3.009 |

**ตารางที่ 9** การโก่งตัวสูงสุดของแผ่นพื้นทั่วไป 2

| $h$<br>(m) | $w_{max}/h$<br>Present | $w_{max}/h$<br>FEM | %diff |
|------------|------------------------|--------------------|-------|
| 0.127      | 0.0029145              | 0.0029234          | 0.304 |
| 0.190      | 0.0009308              | 0.0009328          | 0.220 |
| 0.254      | 0.0004496              | 0.0004502          | 0.146 |
| 0.318      | 0.0002652              | 0.0002654          | 0.099 |

จากตารางที่ 8 และ 9 สังเกตว่าเมื่อเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวสูงสุดกับวิธี Finite Element Method จากโปรแกรม Ansys คำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธี BEM ในการประยุกต์ใช้กับแผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อนและวางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่น


**รูปที่ 8** ผลการวิเคราะห์แผ่นพื้นรูปร่างทั่วไป 1 จากโปรแกรม Ansys

**รูปที่ 9** ผลการวิเคราะห์แผ่นพื้นรูปร่างทั่วไป 2 จากโปรแกรม Ansys



#### 4. สรุป

การศึกษาวิธีการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ใช้ร่วมกับหลักการสมการแอนะล็อกเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการตัดของแผ่นพื้นของการศึกษาครั้งนี้ แบ่งการศึกษาออกเป็น 5 ประเด็น สรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

1) ผลจากวิธีการบาวดารีเอลิเมนต์เมื่อเทียบกับผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์ที่มีเงื่อนไขของปัญหาเหมือนกันพบว่า มีค่าใกล้เคียงกันมาก แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพที่ยอดเยี่ยมในการใช้วิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นหนาต่างๆ ที่ได้จากวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้

2) ผลการศึกษาเงื่อนไขจุดรองรับที่ขอบแบบต่างๆ แสดงให้เห็นถึงค่าความแข็งของจุดรองรับแต่ละแบบ โดยที่รองรับธรรมดาแบบอ่อนจะมีค่าความแข็งน้อยที่สุดในขณะที่รองรับแบบยึดแน่นจะมีค่าความแข็งมากที่สุด และที่รองรับการเคลื่อนที่ยึดหยุ่น เมื่อ  $k_s = 0$  พฤติกรรมจะเหมือนที่รองรับแบบอิสระ แต่ถ้า  $k_s$  มีค่าสูงๆ พฤติกรรมจะเหมือนที่รองรับธรรมดาแบบอ่อน และที่รองรับการยึดรั้งยึดหยุ่น เมื่อ  $k_r = 0$  พฤติกรรมจะเหมือนที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง แต่ถ้า  $k_r$  มีค่าสูงๆ พฤติกรรมจะเหมือนที่รองรับแบบยึดแน่น

3) การวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นหนาที่วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่นหลายชั้น ตั้งแต่ 1 ชั้นไปจนถึง 5 ชั้น ทำให้ทราบว่าเมื่อพิจารณาจำนวนชั้นของฐานรากเพิ่มขึ้นค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางของแผ่นพื้นจะมีค่าเพิ่มขึ้นแต่ในทางตรงกันข้าม อัตราการเพิ่มขึ้นนั้นมีแนวโน้มลดลงอย่างเห็นได้ชัด จากกรณีศึกษาพบว่า พิจารณาฐานรากเพียง 4 ชั้น เพียงพอต่อการวิเคราะห์พฤติกรรมของแผ่นพื้นที่วางอยู่บนฐานรากยึดหยุ่น

4) การศึกษาแผ่นพื้นหนาวางบนฐานรากยึดหยุ่นจำนวน 4 ชั้น และมีเงื่อนไขที่ขอบเขตแบบผสม โดยเงื่อนไขที่ขอบเขตของแผ่นพื้นแบ่งออกเป็น 9 กรณี เป็นการผสมกันระหว่างเงื่อนไขที่รองรับแบบยึดแน่น (C) เงื่อนไขที่รองรับธรรมดาแบบแข็ง (S) และเงื่อนไขที่รองรับแบบอิสระ (F) การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเป็นเกณฑ์มาตรฐานไว้ใช้ในการเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีอื่น

5) ผลจากการประยุกต์ใช้วิธี BEM กับปัญหาแผ่นพื้น

รูปร่างที่ซับซ้อนวางบนฐานรากยึดหยุ่น 4 ชั้น ผลที่ได้เทียบกับผลจากโปรแกรม Ansys Workbench พบว่า มีค่าใกล้เคียงกัน แสดงให้เห็นว่าวิธี BEM สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นรูปร่างซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

#### 5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนเงินทุนวิจัยและวิชาการตามแผนกลยุทธ์เพื่อพัฒนาภาควิชาวิศวกรรมโยธา มจร. (CE-KMUTT 6209)

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] R. D. Mindlin, "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, no. 1, pp. 31–38, 1951.
- [2] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 2, pp. 69–77, 1945.
- [3] E. Reissner, "On bending of elastic plates," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 55–68, 1947.
- [4] E. Winkler, "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit," *Dominicus, Prague*, 1867.
- [5] A. D. Kerr, "On the formal development of elastic foundation models," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 54, no. 6, pp. 455–464, 1984.
- [6] B. Chinnaboon, S. Chucheepsakul, and J. T. Katsikadelis, "A BEM-based domain meshless method for the analysis of Mindlin plates with general boundary conditions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 13–16, pp. 1379–1388, 2011.
- [7] Y. F. Rashed, M. H. Aliabadi, and C. A. Brebbia, "Hypersingular boundary element formulation

- for Reissner plates,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, no.18, pp. 2229–2249, 1998.
- [8] J. T. Katsikadelis and A. J. Yotis, “A new boundary element solution of thick plates modelled by Reissner's theory,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 12, no.1, pp. 65–74, 1993.
- [9] J. T. Katsikadelis, and A. E. Armenakas, “Plates on Elastic Foundation by BIE Method,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, no.7, pp. 1086–1105, 1984.
- [10] J. Balaš, V. Sládek, and J. Sládek, “The boundary integral equation method for plates resting on a two-parameter foundation,” *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 64, no. 3, pp. 137–146, 1984.
- [11] J. A. Costa and C. A. Brebbia, “The boundary element method applied to plates on elastic foundations,” *Engineering Analysis*, vol. 2, no. 4, pp. 174–183, 1985.
- [12] J. Puttonen and P. Varpasuo, “Boundary element analysis of a plate on elastic foundations,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, no. 2, pp. 287–303, 1985.
- [13] G. Bezzine, “A new boundary element method for bending of plates on elastic foundations,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 24, no. 6, pp. 557–565, 1988.
- [14] N. Kamiya and Y. Sawaki, “The plate bending analysis by the dual reciprocity boundary elements,” *Engineering Analysis*, vol. 5, no.1, pp. 36–40, 1988.
- [15] W. Jianguo, W. Xiuxi, and H. Maokuang, “A boundary integral equation formulation for thick plates on a Winkler foundation,” *Computers & Structures*, vol. 49, no. 1, pp. 179–185, 1993.
- [16] Y. F. Rashed, M. H. Aliabadi, and C. A. Brebbia, “The boundary element method for thick plates on a Winkler foundation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41, no. 8, pp. 1435–1462, 1998.
- [17] M. Altoé, N. S. Ribeiro, and V. J. Karam, “Analysis of simply supported and clamped Reissner's plates on Pasternak-type foundation by the Boundary Element Method,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 52, pp. 64–70, 2015.
- [18] J. T. Katsikadelis, “Analysis of simply supported and clamped Reissner's plates on Pasternak-type foundation by the Boundary Element Method,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, no. 27, pp. 13–38, 2002.
- [19] G. Bosson, “The flexure of an infinite elastic strip on an elastic foundation,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 27, no.180, pp. 37–50, 1939.
- [20] C. M. Wang, J. N. Reddy, and K. H. Lee, *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*, Elsevier Science Ltd, Kidlington, Oxford, 2000.
- [21] H. Kobayashi and K. Sonoda, “Rectangular Mindlin plates on elastic foundations,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 31, no. 9, pp. 679–692, 1989.

