บทความวิจัย

สูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย*
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0-2564-4444 ต่อ 2100 อีเมล: spatchan@tu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.11.003
รับเมื่อ 11 สิงหาคม 2559 ตอบรับเมื่อ 28 ตุลาคม 2559 เผยแพร่ออนไลน์ 16 พฤศจิกายน 2559

บทคัดย่อ

โดยทั่วไปการสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นจะต้องเขียนโปรแกรมโดยใช้ซอฟต์แวร์หรือภาษาหนึ่ง ๆ เช่น R และ Matlab เป็นต้น จึงอาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นไม่ได้รับความนิยม การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนเป็นหนึ่งในการแจกแจงที่สำคัญเนื่องจากมีการประยุกต์ใช้ในหลายสาขาวิชา ในงานวิจัยนี้จึงได้หาสูตรที่คำนวณได้ด้วยมือสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนในกรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง ในทางคณิตศาสตร์สามารถพิสูจน์ได้ว่า ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณไม่ได้ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยลู่เข้าสู่อนันต์แต่จะลู่เข้าหาค่าหนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับตัวอย่างที่สุ่มได้ จากการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 2 โดยพิจารณาจากความยาวของช่วงและค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมแล้วพบว่า ความยาวของช่วงที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์มีค่ามากกว่าความยาวของช่วงจากวิธีภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณในทุกกรณีของการศึกษาเชิงจำลอง ด้วยสาเหตุนี้จึงส่งผลให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์สูงว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นแล้ววิธีทั้ง 2 ให้ช่วงเชื่อมั่นที่มีความยาวของช่วงและความน่าจะเป็นคุ้มรวมใกล้เคียงกัน

คำสำคัญ: ความน่าจะเป็นคุ้มรวม, การจำลองมอนติคาร์โล

การอ้างอิงบทความ: พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย, "สูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 27, ฉบับที่ 3, หน้า 467–479, ก.ค.–ก.ย. 2560

Research Article

Simple Formulas for Profile- and Estimated-likelihood Based Confidence Intervals for the Mean of Inverse Gaussian Distribution

Patchanok Srisuradetchai*
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Rangsit Campus, Pathum Thani, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 0–2564–4444 Ext. 2100, E–mail: spatchan@tu.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2016.11.003
Received 11 August 2016; Accepted 28 October 2016; Published online: 16 November 2016

Abstract

In general, the construction of likelihood-based confidence intervals requires programming in a certain software package or programming language such as R and Matlab. This could be one reason why likelihood-based confidence intervals are not often employed. The inverse Gaussian distribution is one of the important distributions as it is widely applied in many areas. In this research, the simple formulas for profile- and estimated-likelihood based confidence intervals for the mean of Inverse Gaussian distribution with an unknown shape parameter are proposed so that constructing an interval can be calculated by hand. Also, the estimated likelihood function is mathematically proved that it does not converge to zero when the mean approaches infinity. Instead, it converges to a certain quantity depending on a sample. Comparisons of confidence intervals are achieved by using the length of intervals and coverage probabilities as criteria., and the result shows that the length of confidence intervals using the profile likelihood is greater than that produced by the estimated likelihood for all cases in the simulation study. This results in a higher coverage probability for the profile likelihood than the estimated likelihood. However, as the sample size increases, both methods produce about the same length of confidence interval and coverage probabilities.

Keywords: Coverage Probability, Monte Carlo Simulation

Please cite this article as: P. Srisuradetchai, "Simple formulas for profile- and estimated-likelihood based confidence intervals for the mean of inverse gaussian distribution," *The Journal of KMUTNB.*, vol. 27, no. 3, pp. 467–479, Jul.–Sep. 2017 (in Thai).

1. บทนำ

การประมาณค่าแบบช่วงเป็นส่วนที่สำคัญมากในการอนุมานเชิงสถิติและพารามิเตอร์ที่มักสนใจในลำดับต้นๆ คือ ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนเป็นหนึ่งในหลายๆ การแจกแจงที่สำคัญที่ได้รับความสนใจเนื่องจากการแจกแจงนี้ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลายแขนงวิชา เช่น Wise [1] ได้นำไปใช้ในการศึกษาวงจรเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของอนุภาคในกระแสโลหิต Onar และ Padgett [2] ใช้การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนสำหรับข้อมูลแรงต้านทานการดึง (Tensile Strength) ของคาร์บอนไฟเบอร์ Jain และ Jain [3] ประมาณฟังก์ชันความเชื่อถือได้ (Reliability Function) สำหรับระยะเวลาล้มเหลวของอุปกรณ์โดยใช้การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนมีลักษณะเบ้ขวาประกอบไปด้วยพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง μ (Location Parameter) และพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ (Shape Parameter) โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น คือ

$$f(x;\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left\{\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\} \tag{1}$$

โดยที่ $x>0, \mu>0$ และ $\lambda>$ ในที่นี้จะให้แทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim IG(\mu, \lambda)$ Schrödinger [4] ได้พิสูจน์ว่า ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ μ และ λ คือ $\hat{\mu}=\bar{X}$ และ $\hat{\lambda}=n\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(1/X_i-1/\bar{X}\right)$ ตามลำดับ โดยที่ $\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i\Big/n$ และ Tweedie [5] ได้พิสูจน์ว่า 1) $\bar{X}\sim IG(\mu,n\lambda)$ 2) $\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(1/X_i-1/\bar{X}\right)\sim\chi^2_{n-1}$ และ 3) $\bar{X}$ และ $\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(1/X_i-1/\bar{X}\right)$ ต่างก็เป็นอิสระต่อกัน สำหรับตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำที่สุด (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator: UMVUE) ของ μ และ λ คือ $\hat{\mu}=\bar{X}$ และ $\hat{\lambda}=(n-3)\times\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1/X_i-1/\bar{X}\right)\right]^{-1}$ ตามลำดับ [6]

ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) สำหรับพารามิเตอร์ θ ที่มีสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$ คือช่วง $\left(u(\underset{\sim}{X}),v(\underset{\sim}{X})\right)$ โดยมี $u(\underset{\sim}{X})$ และ $v(\underset{\sim}{X})$ เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งขึ้นอยู่กับตัวอย่าง $\underset{\sim}{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ และมีคุณสมบัติ

$$P\left(u(\underset{\sim}{X})\le\theta\le v(\underset{\sim}{X})\right)=1-\alpha$$

แนวคิดของช่วงความเชื่อมั่นถูกเสนอครั้งแรกโดย Neyman [7] โดยความหมายของช่วงความเชื่อมั่นจะอิงกับหลักการสุ่มซ้ำ (Repeated Sampling Principle) ซึ่งกล่าวว่า กระบวนการทางสถิติควรอยู่บนพื้นฐานของการทดลองที่ทำซ้ำได้และมีการแจกแจงค่าตัวอย่าง (Sampling Distribution) ที่ทำให้ทราบผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองนั้นๆ แนวคิดดังกล่าวนี้เป็นปรัชญาของ Frequentist ซึ่งในบางศาสตร์ เช่น โบราณคดี เศรษฐศาสตร์ ดาราศาสตร์ การทดลองอาจไม่สามารถทำซ้ำได้ [8]

การอนุมานเชิงสถิติแบบเบส์ (Bayesian) ไม่ได้อิงกับหลักการสุ่มซ้ำ แต่มองว่าพารามิเตอร์ θ ที่สนใจนั้นมีการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน (Prior Distribution) และหลังจากเก็บข้อมูลมาจะนำไปปรับปรุงการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน แล้วเรียกการแจกแจงที่ปรับปรุงแล้วว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง (Posterior Probability Distribution) ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญในการอนุมานเชิงสถิติแบบเบส์ [9]

สำหรับการอนุมานเชิงสถิติแบบ Fisherian ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) เพียงอย่างเดียว หลักการดังกล่าวนี้มีส่วนที่คล้ายกับทั้ง Frequentist และแบบเบส์ ผู้ที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Rohde [10]

ในงานวิจัยนี้ เราสนใจการประมาณแบบช่วงโดยใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ซึ่งเป็นแนวคิดแบบ Fisherian Fisher [11] ได้นิยามช่วงภาวะน่าจะเป็นของ θ คือ เซตของ θ ที่มีคุณสมบัติ

$$\left\{\theta\left|\frac{L(\theta)}{\max L(\theta)}\ge c\right.\right\}=\left\{\theta\left|\frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})}\ge c\right.\right\} \tag{2}$$

โดยที่ $L(\theta)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ θ และ $L(\hat{\theta})$ คือ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ θ มีค่าเท่ากับค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด สำหรับ

การกำหนดค่า c นั้น จะอาศัยอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นของ Wilk [12] ซึ่งแสดงดังในสมการที่ (3)

$$W = -2\log_e \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} \tag{3}$$

ตัวแปรสุ่ม W นี้มีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution) เป็นการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 แต่ในกรณีที่ตัวแปรสุ่มที่สนใจมีการแจกแจงปรกติ W จะมีการแจกแจงที่แท้จริงแบบไคกำลังสอง ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็น คือ

$$\left\{\theta \left| \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)\right.\right\} \tag{4}$$

โดยที่ $\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ แทนควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ของ χ^2_1 [8]

สำหรับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ดังแสดงในสมการที่ (1) มีพารามิเตอร์ 2 ตัว ในกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ Arefi *et al*. [13] ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ คือ 1) ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald) $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\, \bar{X}^{3/2}\big/\sqrt{n\lambda}$ 2) ช่วงความเชื่อมั่นแบบสกอร์ (Score) ซึ่งได้จากการแก้สมการ $-z_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n\lambda}\left(\bar{X}-\mu\right)\big/\sqrt{\mu^3} \leq z_{1-\alpha/2}$ และ 3) ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น

$$\frac{n\lambda\bar{X}}{n\lambda + k\sqrt{n\lambda\bar{X}}} \leq \mu \leq \frac{n\lambda\bar{X}}{n\lambda - k\sqrt{n\lambda\bar{X}}} \tag{5}$$

โดยที่ $k = \sqrt{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}$ และ $0 < k < \sqrt{n\lambda/\bar{X}}$ ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าวนี้จะขึ้นอยู่กับตัวอย่างที่สุ่มได้ Srisuradetchai [14] ได้พิสูจน์ว่าเงื่อนไข $0 < k < \sqrt{n\lambda/\bar{X}}$ ของสมการที่ (5) ก็คือเงื่อนไขเดียวกันกับสมการที่ (6)

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})} = \exp\left(\frac{-n\lambda}{2\hat{\mu}}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right) \tag{6}$$

สำหรับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นที่ขึ้นอยู่กับ 2 พารามิเตอร์ซึ่งจะเรียกว่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม ซึ่งแทนด้วย $L(\mu,\lambda)$ เพื่อที่จะสร้างช่วงความเชื่อมั่นตามสมการที่ (2) จำเป็นต้องกำจัดพารามิเตอร์ที่ไม่สนใจหรือพารามิเตอร์รบกวน (Nuisance Parameter) λ ซึ่งมี 2 วิธีด้วยกัน คือ ใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (Profile Likelihood Function) และฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ (Estimated Likelihood Function)

เมื่อกำหนดฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม $L(\mu,\lambda)$ แล้ว ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณของ μ หาได้จาก

$$L(\mu) = \max_{\lambda} L(\mu,\lambda) \tag{7}$$

ซึ่งได้จากการแทนด้วยตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\lambda} = n\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(1/x_i - 1/\bar{x}\right)$ และฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ μ หาได้จากสมการที่ (7) เช่นเดียวกัน แต่การหาค่า λ ที่ทำให้ $L(\mu,\lambda)$ มีค่าสูงสุดนั้นจะกำหนดให้ μ เป็นค่าคงที่ก่อน ซึ่งจะได้ว่า

$$\tilde{\lambda} = \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n} - \frac{2}{\mu}\right)^{-1} \tag{8}$$

เป็นค่าที่ทำให้ $L(\mu)$ มีค่าสูงสุด เพื่อความชัดเจนในที่นี้จะให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโดยประมาณแทนด้วย $L(\mu,\tilde{\lambda})$ และ $L(\mu,\hat{\lambda})$ ตามลำดับ

จากสมการที่ (4) จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ μ ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ คือ

$$\left\{\mu \left| \frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})} \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)\right.\right\} \tag{9}$$

Srisuradetchai [14] ได้พิสูจน์แล้วว่า $\max L(\mu,\tilde{\lambda})$ เท่ากับ $L(\hat{\mu},\tilde{\lambda})$ โดยที่ $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \big/ n$ และตัวอย่าง $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่ใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นได้จะต้องมีคุณสมบัติดังในสมการที่ (10)

$$\left(1-\frac{n}{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}\right)^{n/2} \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right) \tag{10}$$

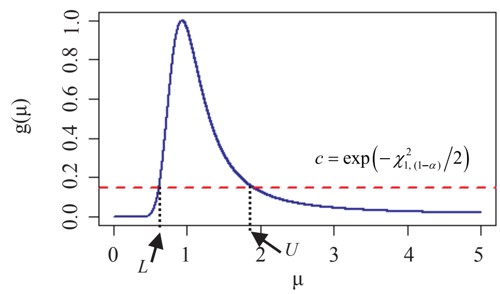
สำหรับช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ μ ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ คือ

$$\left\{\mu \left| \frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{\max L(\mu,\hat{\lambda})} \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)\right.\right\} \tag{11}$$

จากการทบทวนวรรณกรรมพบว่า ยังไม่พบว่า $L(\mu,\hat{\lambda})$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อ μ มีค่าเท่าใดและยังไม่ทราบเงื่อนไขที่ตัวอย่างหนึ่งๆ จะใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณได้ จึงได้นำมาศึกษาเพิ่มเติมในงานวิจัยนี้

การหาช่วงความเชื่อมั่นไม่ว่าจะเป็นวิธีแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์หรือแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ จะต้องพล็อตกราฟ $g(\mu) = L(\mu,\tilde{\lambda})/\max L(\mu,\tilde{\lambda})$ หรือ $g(\mu) = L(\mu,\hat{\lambda})/\max L(\mu,\hat{\lambda})$ เทียบกับค่า μ แล้วขอบเขตล่าง (L) และขอบเขตบน (U) หาได้จาก $L = g^{-1}(c)$ และ $U = g^{-1}(c)$ ตามลำดับ โดยที่ $c = \exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ การหาขอบเขตบนและล่างนี้จะไม่สามารถคำนวณด้วยมือได้ จะต้องเขียนโปรแกรมคำสั่งเพื่อหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numberical Method) จากรูปที่ 1 หาก $\lim_{\mu\to\infty} g(\mu) > c$ จะทำให้ไม่สามารถสร้างช่วงเมื่อมั่นได้ เนื่องจากไม่สามารถหา U ได้

ในกรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ Srisuradetchai [14] ได้ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ในการกำจัดพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า λ แล้วหาช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งต้องเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งไม่สะดวกในทางปฏิบัติ ในงานวิจัยนี้จึงมีจุดประสงค์หลักเพื่อหาสูตรอย่างง่ายทางคณิตศาสตร์สำหรับช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณซึ่งสามารถนำไปใช้ได้โดยการแทนค่าสูตร พร้อมทั้งเปรียบเทียบความยาวช่วงโดยใช้การจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation)



รูปที่ 1 การหาขอบเขตบนและล่างของช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็น

2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นที่การศึกษาในเชิงทฤษฎีและนำผลการศึกษาที่ได้ไปศึกษาเชิงจำลอง โดยมีขั้นตอนหลักๆ เป็นดังนี้

1) ทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

2) ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวกับช่วงแบบภาวะน่าจะเป็นการกำจัดพารามิเตอร์รบกวนโดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ

3) หาสูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์โดยการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

4) ศึกษาลิมิตของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณเมื่อพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยลู่เข้าสู่ศูนย์และอนันต์โดยการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

5) หาสูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณโดยการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

6) เปรียบเทียบความยาวช่วงและค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมของช่วงที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ โดยใช้การจำลองมอนติคาร์โลเมื่อประชากรมีการแจกแจง $IG(\mu=1,\lambda=1)$ และ $IG(\mu=7, \lambda=1)$ โดยกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 30 และ 100

3. ผลการวิจัย

ผลการวิจัยจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ ผลการศึกษาในทางคณิตศาสตร์และผลการศึกษาเชิงจำลอง

3.1 ผลการศึกษาในทางคณิตศาสตร์

สูตรที่สามารถคำนวณด้วยมือได้ (โดยมีเครื่องคิดเลขช่วย) สำหรับช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย μ ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ในกรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ โดยใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโดยประมาณในการกำจัดพารามิเตอร์รบกวน (λ) และลิมิตของ $L(\mu,\hat{\lambda})/\max L(\mu,\hat{\lambda})$ ได้พิสูจน์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบทั้งค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ และตัวอย่างสุ่มนี้สามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ μ ได้แล้ว ช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าวจะมีรูปอย่างง่าย คือ

$$\left[\frac{-n+\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B}, \frac{-n-\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B}\right] \tag{12}$$

โดยที่ $$B=\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right)}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} \tag{13}$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{\max L(\mu,\tilde{\lambda})}=\frac{L(\mu,\tilde{\lambda})}{L(\hat{\mu},\tilde{\lambda})}=\frac{\exp\left(\log L(\mu,\tilde{\lambda})\right)}{\exp\left(\log L(\hat{\mu},\tilde{\lambda})\right)}$$

$$=\frac{\exp\left[\frac{n}{2}\log(n\mu)-\frac{n}{2}\log\left(\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+\frac{n\hat{\mu}}{\mu}-2n\right)\right]}{\exp\left[\frac{n}{2}\log(n\hat{\mu})-\frac{n}{2}\log\left(\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n-2n\right)\right]}$$

$$=\left[\frac{\mu}{\hat{\mu}}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\right]^{n/2}$$

โดยที่ $\tilde{\lambda}$ แสดงดังในสมการที่ (8) และจากสมการที่ (9) จะได้ว่า

$$\left[\frac{\mu}{\hat{\mu}}\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\right]^{n/2}\geq c$$

$$\left(\frac{\mu}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}}\right)\geq c^{\frac{2}{n}}$$

โดยที่ $c=\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ และเนื่องจากวงเล็บอันหลัง (ด้านซ้ายของอสมการ) ไม่ขึ้นกับ μ และมีค่าบวก ดังพิสูจน์ในบทตั้ง i (ภาคผนวก) จะได้ว่า

$$\left(\frac{\mu}{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\hat{\mu}/\mu-2n}\right)\geq c^{\frac{2}{n}}\bigg/\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\hat{\mu}/\mu^2-2n/\mu\leq\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}c^{\frac{2}{n}}}$$

$$n\hat{\mu}/\mu^2-2n/\mu\leq\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}c^{\frac{2}{n}}}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}$$

$$0\leq B\mu^2+2n\mu-n\hat{\mu}$$

โดยที่ B แสดงดังในสมการที่ (13)

เนื่องจาก $B<0$ ดังพิสูจน์ในบทตั้ง ii (ภาคผนวก) จะได้ว่ารากของอสมการ $0\leq B\mu^2+2n\mu-n\hat{\mu}$ คือ

$$\mu\in\left[\frac{-n+\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B}, \frac{-n-\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B}\right]$$

หมายเหตุ

$$\frac{-n-\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B}\geq\frac{-n+\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B}$$

เนื่องจาก $B<0$

บทตั้ง 3.2 ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบทั้งค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์รูปร่าง λ แล้วฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ $L(\mu, \hat{\lambda})$ จะมีค่าสูงสุดที่ $\mu = \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$ โดยที่ $\hat{\lambda} = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(1/x_i - 1/\bar{x}\right)$

พิสูจน์ หา λ ที่ทำให้ $L(\mu,\lambda)$ มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ของ $\log L(\mu,\lambda)$ เทียบกับ λ แล้วกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ได้ดังนี้

$$\log L(\mu,\lambda) = \frac{n}{2}\log\lambda - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) + \frac{n\lambda}{\mu}$$

ให้ $\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(\mu,\lambda) = 0$ จะได้

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \mu^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - 2n/\mu}$$

แทน μ ด้วย $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n = \bar{x}$ จะได้

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{n^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - 2n^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(1/x_i - 1/\bar{x}\right)}$$

แล้วแทน λ ใน $\log L(\mu,\lambda)$ ด้วย $\hat{\lambda}$ จะได้

$$\log L(\mu,\hat{\lambda}) = \frac{n}{2}\log\hat{\lambda} - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$-\frac{\hat{\lambda}}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) + \frac{n\hat{\lambda}}{\mu}$$

$$= M - \frac{\hat{\lambda}}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu^2}\right) + \frac{n\hat{\lambda}}{\mu}$$

โดยที่ $M = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \frac{n}{2}\log\hat{\lambda} - \frac{\hat{\lambda}}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$

แล้วหา μ ที่ทำให้ $\log L(\mu,\hat{\lambda})$ มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ของ $\log L(\mu,\hat{\lambda})$ เทียบกับ μ แล้วกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu,\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu^3} - \frac{n\hat{\lambda}}{\mu^2}$$

กำหนดให้ $\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu,\hat{\lambda}) = 0$ จะได้ $\mu = \hat{\mu}$ ดังนั้นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ $L(\mu,\hat{\lambda})$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\mu = \hat{\mu}$ จะได้ว่า $\max L(\mu,\hat{\lambda}) = L(\hat{\mu},\hat{\lambda})$

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบทั้งค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์รูปร่าง λ แล้ว

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{\max L(\mu,\hat{\lambda})} = 0$$

และ

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{\max L(\mu,\hat{\lambda})} = \exp\left(-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}}\right)$$

พิสูจน์ จากบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า $\max L(\mu,\hat{\lambda})$ จะมีค่าเท่ากับ $L(\hat{\mu},\hat{\lambda})$ แล้ว

$$\frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{\max L(\mu,\hat{\lambda})} = \frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{L(\hat{\mu},\hat{\lambda})} = \frac{\exp\left(\log L(\mu,\hat{\lambda})\right)}{\exp\left(\log L(\hat{\mu},\hat{\lambda})\right)}$$

$$= \frac{\exp\left[M - \frac{\hat{\lambda}\sum x_i}{2\mu^2} + \frac{n\hat{\lambda}}{\mu}\right]}{\exp\left[M - \frac{\hat{\lambda}\sum x_i}{2\hat{\mu}^2} + \frac{n\hat{\lambda}}{\hat{\mu}}\right]}$$

$$= \exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}} + \frac{2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2}\right]$$

โดยที่

$$M = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \frac{n}{2}\log\hat{\lambda} - \frac{\hat{\lambda}}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}$$

แล้วหาลิมิตจะได้ว่า

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{\max L(\mu,\hat{\lambda})} = \lim_{\mu\to 0}\exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}} + \frac{2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2}\right]$$

$$= \exp\left[\lim_{\mu\to 0}\left(-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}} + \frac{2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}} + \left(\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{2\mu^2}\right)\left(\lim_{\mu\to 0}\left(2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}\right)\right)\right]$$

$$= 0$$

และ

$$\lim_{\mu\to \infty}\frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{\max L(\mu,\hat{\lambda})} = \lim_{\mu\to \infty}\exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}} + \frac{2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2}\right]$$

$$= \left(\lim_{\mu\to\infty}\exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}}\right]\right)\left(\lim_{\mu\to\infty}\exp\left[\frac{2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2}\right]\right)$$

$$= \exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}}\right]$$

จากทฤษฎีบทข้างต้น ทำให้ทราบว่าตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มได้จะใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณได้ถ้า

$$\exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}}\right] \le \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)$$

หรือ $\dfrac{n\hat{\lambda}}{\hat{\mu}} \ge \chi^2_{1,(1-\alpha)}$

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบทั้งค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ และตัวอย่างสุ่มนี้สามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณของ μ ได้แล้ว ช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าวจะมีรูปอย่างง่าย คือ

$$\left[\frac{A-B}{C}, \frac{A+B}{C}\right] \tag{14}$$

โดยที่

$$A = n\hat{\lambda}\hat{\mu}, B = \hat{\mu}\sqrt{n\hat{\lambda}\hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}}, C = n\hat{\lambda} - \hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

$\hat{\lambda} = n\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1/x_i - 1/\bar{x}\right)\right]^{-1}$ และ $\hat{\mu} = \bar{x}$

พิสูจน์ จากสมการที่ (11) จะได้ว่าช่วงความเชื่อมั่นหาได้จาก

$$\frac{L(\mu,\hat{\lambda})}{\max L(\mu,\hat{\lambda})} \ge \exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$$

$$\exp\left[\frac{2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2}\right] \ge \frac{\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)}{\exp\left(-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}}\right)}$$

$$\exp\left(\frac{2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2}\right) \ge \exp\left(-\frac{\chi^2_{1,(1-\alpha)}}{2} + \frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}}\right)$$

$$\frac{n\hat{\lambda}}{\mu} - \frac{n\hat{\mu}\hat{\lambda}}{2\mu^2} \ge \frac{n\hat{\lambda} - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\hat{\mu}}{2\hat{\mu}}$$

$$2n\hat{\lambda}\mu - n\hat{\mu}\hat{\lambda} \ge \left(\frac{n\hat{\lambda} - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\hat{\mu}}{\hat{\mu}}\right)\mu^2$$

$$0 \ge T\mu^2 - 2n\hat{\lambda}\mu + n\hat{\mu}\hat{\lambda}$$

โดยที่ $T = \dfrac{n\hat{\lambda} - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\hat{\mu}}{\hat{\mu}}$ และเนื่องจาก $T > 0$ ดังพิสูจน์ในบทตั้ง iii (ภาคผนวก) จะได้ว่ารากของอสมการ $0 \geq T\mu^2 - 2n\hat{\lambda}\mu + n\hat{\mu}\hat{\lambda}$ คือ

$$\mu \in \left[\frac{n\hat{\lambda} - \sqrt{n^2\hat{\lambda}^2 - Tn\hat{\mu}\hat{\lambda}}}{T}, \frac{n\hat{\lambda} + \sqrt{n^2\hat{\lambda}^2 - Tn\hat{\mu}\hat{\lambda}}}{T}\right]$$

แต่

$$n^2\hat{\lambda}^2 - Tn\hat{\mu}\hat{\lambda} = n^2\hat{\lambda}^2 - \left(\frac{n\hat{\lambda} - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\hat{\mu}}{\hat{\mu}}\right)n\hat{\mu}\hat{\lambda}$$

$$= n\hat{\lambda}\hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

ดังนั้น

$$\frac{n\hat{\lambda} \pm \sqrt{n^2\hat{\lambda}^2 - Tn\hat{\mu}\hat{\lambda}}}{T} = \frac{n\hat{\lambda}\hat{\mu} \pm \hat{\mu}\sqrt{n\hat{\lambda}\hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}}}{n\hat{\lambda} - \hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}}$$

3.2 ผลการศึกษาเชิงจำลอง

ในหัวข้อนี้เป็นการเปรียบเทียบความยาวของช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และแบบโดยประมาณ ในการเปรียบเทียบจะพิจารณาจากอัตราส่วนของความยาวช่วงที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ต่อความยาวช่วงที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ ซึ่งไม่จำเป็นต้องคำนวณความยาวช่วงจากสมการที่ (12) และ (14) แล้วนำมาหารกันแต่จะพิจารณาจากสูตรที่ได้จากการจัดรูปต่อไปนี้

ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ คือ

$$\frac{-n - \sqrt{n^2 + Bn\overline{x}}}{B} - \frac{-n + \sqrt{n^2 + Bn\overline{x}}}{B} = \frac{-2\sqrt{n^2 + Bn\overline{x}}}{B}$$

แต่ $Bn\overline{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)B$

$$= \left(\sum x_i\right)\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - n^2}{e^{-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n}\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right]$$

$$= \left(\sum x_i\right) \times \left[\frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum {}_i^{-1}\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum {}_i^{-1}\right)e^{-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - n^2}{\left(\sum x_i\right)e^{-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n}}\right]$$

$$= \left(\sum x_i\right) \times \left\{\frac{\sum x_i^{-1}\left[1 - e^{-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n}\right]}{e^{-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n}} - \frac{n^2}{e^{-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n}\sum x_i}\right\}$$

$$= \left(\sum x_i\right) \times \left\{\sum x_i^{-1}\left[e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - 1\right] - \frac{n^2 e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n}}{\sum x_i}\right\}$$

$$= \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^{-1}\right)\left(e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - 1\right) - n^2 e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n}$$

ดังนั้น

$$n^2 + Bn\overline{x} = \left(e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - 1\right)\left[\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^{-1}\right) - n^2\right]$$

จะได้ว่า

$$\frac{-2\sqrt{n^2 + Bn\overline{x}}}{B} = \frac{\sqrt{e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - 1}}{n^2 e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^{-1}\right)\left(e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - 1\right)}$$

$$\times\left(2\left(\sum x_i\right)\sqrt{\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2}\right) \qquad (15)$$

ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ คือ

$$\frac{2\hat{\mu}\sqrt{n\hat{\lambda}\hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}}}{n\hat{\lambda} - \hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}}$$

เนื่องจาก $n\hat{\lambda}\hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)} = \dfrac{n\left(\sum x_i\right)^2 \chi^2_{1,(1-\alpha)}}{\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^{-1}\right) - n^2}$

ดังนั้น

$$\frac{2\hat{\mu}\sqrt{n\hat{\lambda}\hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}}}{n\hat{\lambda} - \hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}} = \frac{\dfrac{2\sum x_i}{n}\sqrt{\dfrac{n\left(\sum x_i\right)^2 \chi^2_{1,(1-\alpha)}}{\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2}}}{\dfrac{n^2\left(\sum x_i\right)}{\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^{-1}\right) - n^2} - \dfrac{\chi^2_{1,(1-\alpha)}\left(\sum x_i\right)}{n}}$$

$$= \frac{2\left(\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2\right)}{n^3 - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\left(\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2\right)} \sqrt{\frac{n\left(\sum x_i\right)^2 \chi^2_{1,(1-\alpha)}}{\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{n\chi^2_{1,(1-\alpha)}}}{n^3 - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\left(\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2\right)} \times$$

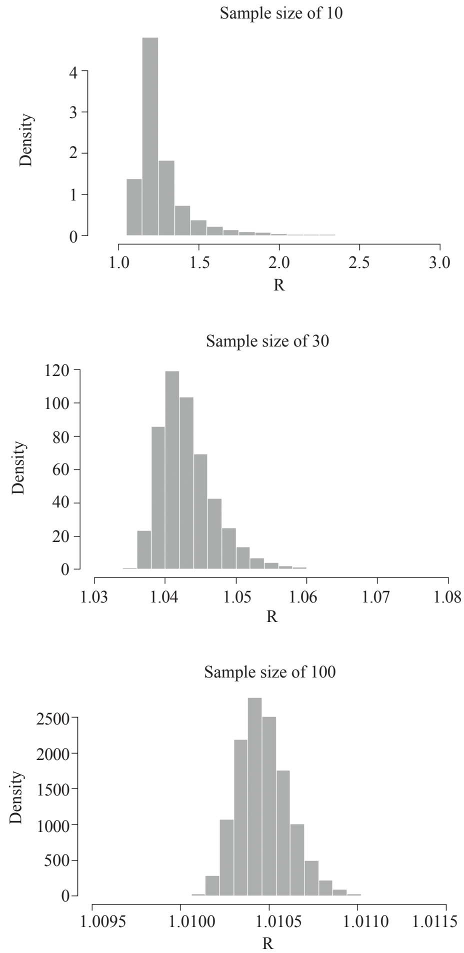
$$\times\left(2\left(\sum x_i\right)\sqrt{\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2}\right) \qquad (16)$$

จะสังเกตว่าสมการที่ (15) และ (16) มีเทอม $2\left(\sum x_i\right)\times\sqrt{\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2}$ เหมือนกัน อัตราส่วนของความยาวช่วง (R) หาได้จากสมการที่ (15)/(16) ซึ่งจะเท่ากับ

$$R = \sqrt{\frac{e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - 1}{n\chi^2_{1,(1-\alpha)}}} \times$$

$$\frac{n^3 - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\left(\sum x_i \sum x_i^{-1} - n^2\right)}{n^2 e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^{-1}\right)\left(e^{\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n} - 1\right)} \qquad (17)$$

สมมติสุ่มตัวอย่างขนาด n ($n = 10, 30, 100$) จำนวน 100,000 ตัวอย่างจากประชากร $IG(\mu = 1, \lambda = 1)$ ซึ่งมีความเบ้ $3\sqrt{1/1} = 3$ แล้วคำนวณค่า R ตามสมการที่ (17) แล้วนำมาพล็อตฮิสโทแกรมดังแสดงในรูปที่ 2 จะสังเกตว่าอัตราส่วนมีค่าไม่ต่ำกว่า 1 ในทั้ง 3 กรณี แสดงว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์จะให้ช่วงที่กว้างกว่าช่วงจากวิธีภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น อัตราส่วน R จะมีการกระจายน้อยลง กล่าวคือ $n = 10$, 30 และ 100 จะมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ R เท่ากับ 2.3056×10^{-1}, 4.0539×10^{-3} และ 1.4671×10^{-4} ตามลำดับ สำหรับค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมได้สรุปไว้ในตารางที่ 1 ซึ่งจะเห็นว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์มีค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมสูงกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณแต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นแล้ว วิธีทั้งสองให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมใกล้เคียงกัน



รูปที่ 2 อัตราส่วนของความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% แบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์กับแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 30 และ 100 และประชากรมีการแจกแจง $IG(\mu = 1, \lambda = 1)$

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโดยประมาณสำหรับ $X \sim IG(\mu = 1, \lambda = 1)$

วิธีภาวะน่าจะเป็น	ขนาดตัวอย่าง (*n*)		
	$n = 10$	$n = 30$	$n = 100$
โปรไฟล์	0.9303	0.9436	0.9577
โดยประมาณ	0.9056	0.9356	0.9560

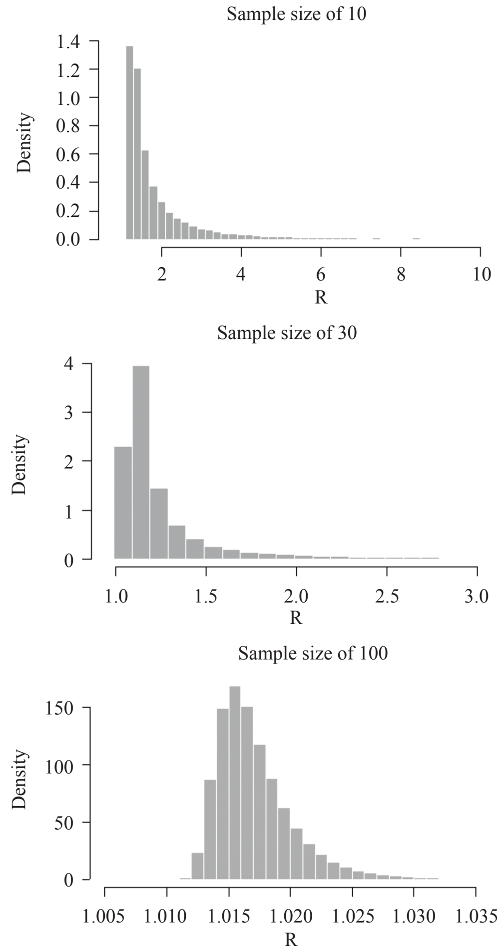
ตารางที่ 2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโดยประมาณสำหรับ $X\sim IG(\mu=7, \lambda=1)$

วิธีภาวะน่าจะเป็น	ขนาดตัวอย่าง (n)		
	n = 10	n = 30	n = 100
โปรไฟล์	0.7372	0.9404	0.9564
โดยประมาณ	0.6442	0.9326	0.9545

สมมติ สนใจประชากรที่มีความเบ้เพิ่มมากขึ้น เช่น กรณี μ = 7 และ λ = 1 ซึ่งมีความเบ้ $3\sqrt{7/1} = 7.937$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมของช่วงสรุปไว้ในตารางที่ 2 จะสังเกตว่าผลสรุปที่ได้ยังคงเป็นแนวทางเดียวกันกับกรณี $IG(\mu=1, \lambda=1)$ แต่เนื่องจากประชากรมีความเบ้สูง เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n=10$) ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จะมีค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ที่กำหนดไว้อยู่มาก ตัวอย่างขนาด n = 10, 30 และ 100 จะมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ R เท่ากับ 1.2760, 4.4657×10^{-1} และ 3.3142×10^{-3} ตามลำดับและเมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 2 และ 3 ณ ขนาดตัวอย่างเท่ากัน จะเห็นว่าอัตราส่วน R มีการกระจายสูงในประชากรที่มีความเบ้สูง แต่ค่า R ทั้งหมดยังคงมีค่ามากกว่า 1 ในทุกกรณีที่ศึกษา

4. อภิปรายผลและสรุป

การสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และแบบโดยประมาณสามารถทำได้โดยใช้สูตรสมการที่ (12) และ (14) ตามลำดับ ตามปกติแล้วการหาช่วงแบบภาวะน่าจะเป็นดังในนิยามสมการที่ (9) และ (11) จะต้องเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์แต่สูตรสมการที่ (12) และ (14) สามารถคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขได้ ในทฤษฎีบท 3.3 ได้แสดงให้เห็นว่า $L(\mu,\hat{\lambda})/\max L(\mu,\hat{\lambda})$ ไม่จำเป็นต้องลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $\mu \to \infty$ แต่ลู่เข้าหาปริมาณหนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับตัวอย่างที่สุ่มได้และเมื่อ $\lim_{\mu\to\infty} L(\mu,\hat{\lambda})/\max L(\mu,\hat{\lambda})$ มีค่ามากกว่า $\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/2\right)$ จะไม่สามารถหาขอบเขตบนได้ (รูปที่ 1 เป็นกรณีที่หาขอบเขตบนได้) สำหรับการ



รูปที่ 3 อัตราส่วนของความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% แบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์กับแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 30 และ 100 และประชากรมีการแจกแจง $IG(\mu = 7, \lambda = 1)$

เปรียบเทียบความยาวของ 2 ช่วงความเชื่อมั่น วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ให้ช่วงความเชื่อมั่นที่กว้างกว่าช่วงที่ใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ อย่างไรก็ตาม กรณีที่ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมมีค่าสูงกว่าในวิธีที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ก็เป็นไปตามคาดเพราะช่วงความเชื่อมั่นที่ได้นั้นกว้างกว่าช่วงความเชื่อมั่นจากวิธีภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ

ข้อเสนอแนะในการศึกษาครั้งต่อไป การพิสูจน์ว่าอัตราส่วนของความยาวช่วงที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ต่อความยาวช่วงที่ได้จากภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณนั้น มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 ยังคงเป็นปัญหาในทางคณิตศาสตร์

เอกสารอ้างอิง

[1] M. E. Wise, "Skew distributions in biomedicine including some with negative powers of time," *NATO Advanced Study Institutes Series*, vol. 17, pp. 241–262, 1975.

[2] A. Onar and W. J. Padgett, "Accelerated test models with the inverse Gaussian distribution," *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 89, pp. 119–133, 2000.

[3] R. K. Jain and Sudha Jain, "Inverse Gaussian distribution and its application to reliability," *Microelectronics Reliability*, vol. 36, no. 10, pp. 1323–1335, 1996.

[4] E. Schrödinger, "Zur theorie der fall- und steigversuche an teilchen mit brownscher bewegung," *Physikalische Zeitschrift*, vol. 16, pp. 289–295, 1915.

[5] M. C. K. Tweedie, "Statistical properties of inverse Gaussian distributions I," *Annals Mathematical Statistics*, vol. 28, pp. 362–377, 1957.

[6] J. L. Folks and R. S. Chhikara, "The inverse Gaussian distribution and its statistical application —A review," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 40, no. 3, pp. 263–289, 1978.

[7] J. Neyman, "Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 236, no. 767, pp. 333–380, 1937.

[8] Y. Pawitan, *In All Likelihood: Statistical Modeling and Inference Using Likelihood*, 1st ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.

[9] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis*, 3rd ed. Florida: Chapman & Hall, 2014.

[10] C. A. Rohde, *Introductory Statistical Inference with the Likelihood Function*, 1st ed. London: Springer, 2014.

[11] R. A. Fisher, *Statistical Methods and Scientific Inference*, New York: Macmillan, 1973.

[12] S. S. Wilk, "The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses," *Annals Mathematical Statistics*, vol. 9, pp. 60–62, 1938.

[13] M. Arefi, G. R. Mohtashami Borzadaran, and Y. Vaghei, "A note on interval estimation for the mean of inverse Gaussian distribution," *Statistics and Operations Research Transactions*, vol. 32, no. 1, 2008.

[14] P. Srisuradetchai, "Profile-likelihood based confidence intervals for the mean of inverse Gaussian distribution," *Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, vol. 27, no. 2, 2016 (in Thai).

ภาคผนวก

บทตั้ง i ถ้า $x_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ และ $x_i \neq x_j$ สำหรับ $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ (ค่าของข้อมูลไม่เท่ากันทั้งหมด) แล้ว

$$\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - n}{\hat{\mu}} > 0 \quad \text{โดยที่} \quad \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - n}{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) - n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ตัวส่วนมีค่าไม่เป็นลบ ให้พิจารณาเฉพาะตัวเศษ ดังนั้นในที่นี้จะพิสูจน์ว่า $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) - n^2 \ge 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) - n^2 \\
&= x_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) + x_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) + \ldots + x_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) - n^2 \\
&= (1+1+\ldots+1) + \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \ne j}} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) - n^2 \\
&= \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \ne j}} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) + n - n^2 \\
&= \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \ne j}} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) - 2\binom{n}{2} \\
&= \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \ne j}} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} - 2\right) = \sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \ne j}} \frac{\left(x_i - x_j\right)^2}{x_i x_j} \ge 0
\end{aligned}$$

แต่ $x_i \ne x_j$ สำหรับ $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ดังนั้น

$$\sum_{\substack{i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ i \ne j}} \frac{\left(x_i - x_j\right)^2}{x_i x_j} > 0$$

บทตั้ง ii ถ้า $x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว

$$\left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - n}{\hat{\mu}\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right)}\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \quad < \quad 0$$

พิสูจน์

$$B = \left(\frac{\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - n}{\hat{\mu}\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right)}\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} - \frac{n}{\hat{\mu}}\right)\exp\left(\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)\left(1 - \frac{n}{\hat{\mu}\sum x_i^{-1}}\right)\exp\left(\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)\left\{\left(1 - \frac{n}{\hat{\mu}\sum x_i^{-1}}\right)\exp\left(\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right) - 1\right\}$$

เนื่องจาก $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right) > 0$ ดังนั้น พิจารณาเฉพาะเทอมหลัง ซึ่ง Srisuradetchai [14] ได้แสดงแล้วว่า

$$\left(1 - n\Big/\left(\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)\right)\exp\left(\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right) \le 0$$

ดังนั้น

$$\left(1 - n\Big/\left(\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)\right)\exp\left(\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right) - 1 < 0$$

บทตั้ง iii ถ้า $x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว

$$\frac{n\hat{\lambda} - \chi^2_{1,(1-\alpha)}\hat{\mu}}{\hat{\mu}} \quad > \quad 0$$

พิสูจน์ ในทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ตัวอย่างสุ่มสามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณได้ และจากผลจากทฤษฎีบท 3.3 ทำให้ทราบว่าตัวอย่างสุ่มขนาด n จะใช้สร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ ถ้า $n\hat{\lambda}/\hat{\mu} > \chi^2_{1,(1-\alpha)}$ ซึ่งก็คือ อสมการที่จะพิสูจน์นั่นเอง