

การสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม

สุทธิศักดิ์ พงษ์ชนะพานิช

บทคัดย่อ

เทคนิคการสร้างตาข่ายได้ถูกใช้งานอย่างแพร่หลายสำหรับงานด้านวิศวกรรมรวมถึงงานที่สัมพันธ์กับแบบจำลองทางฟิสิกส์ที่สามารถอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย บทความนี้อธิบายกระบวนการสร้างสามเหลี่ยมเคลอนเน่ในสองมิติอันประกอบด้วยเทคนิควิธีการสร้างตาข่าย เทคนิคการสร้างจุดต่อ เทคนิคการทำให้ตาข่ายสม่ำเสมอ และเทคนิคการปรับตัวได้โดยอัตโนมัติ อัลกอริทึมที่ได้นำเสนอสามารถสร้างตาข่ายสำหรับรูปทรงเรขาคณิตใด ๆ ทั้งโดเมนอย่างง่ายและโดเมนที่ประกอบด้วยหลายขอบเขต เทคนิคดังกล่าวจะสร้างตาข่ายขึ้นมาใหม่โดยขึ้นกับผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองโดยใช้ตาข่ายของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม โดยที่เอลิเมนต์ในบริเวณที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มีขนาดเล็กจะมีขนาดเล็กลง และเอลิเมนต์ในบริเวณที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์น้อยจะมีขนาดโตขึ้น สุดท้ายสมรรถนะของกระบวนการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบจะถูกประเมินบนโดเมนที่มีขอบเขตอย่างง่ายและที่มีหลายขอบเขตของปัญหาทางกลศาสตร์การคำนวณต่าง ๆ

คำสำคัญ : ตาข่ายสามเหลี่ยม, สามเหลี่ยมเคลอนเน่, การประมาณความผิดพลาด

Triangular Mesh Generation for Finite Element/Finite Volume Methods

Sutthisak Phongthanapanich

Abstract

Mesh generation techniques are widely employed in various engineering fields including those related to physical models described by partial differential equations. This paper describes the two-dimensional Delaunay triangulation procedure consisting of mesh generation, node creation, mesh smoothing, and adaptive remeshing technique. The proposed algorithm can generate mesh of arbitrary geometry for both simply connected and multi-boundary domains. The technique generates an entirely new mesh based on the solution obtained from simulation using the previous finite element/finite volume meshes; such that elements in regions with large changes of solution gradients become smaller and elements in areas with little changes of solution gradients grow larger. Finally, the performance of the proposed unstructured triangular mesh regeneration procedures are evaluated on both simply- and multi-connected boundaries domain of computational mechanics problems.

Keywords : Triangular mesh, Delaunay triangulation, Error estimation

Mechanical Engineering Technology Department, College of Industrial Technology, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok 10800,

Corresponding author, E-mail: sutthisakp@kmutnb.ac.th Received 11 October 2011 ; Accepted 6 December 2011

1. บทนำ

การแบ่งแยกโดเมนสำหรับการคำนวณเป็นขั้นตอนแรกสำหรับกระบวนการหาคำตอบของปัญหาทางวิศวกรรมโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม [1-3] หลักการโดยทั่วไปการแบ่งแยกโดเมนออกเป็นตาข่ายสามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ (Unstructured triangular mesh) จะเริ่มต้นด้วยการสร้างจุดต่อ (Node) จากนั้นจึงทำการต่อจุดต่อสามจุดที่อยู่ใกล้กันเป็นตาข่ายสามเหลี่ยม โดยเทคโนโลยีการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมที่เป็นที่ยอมรับในปัจจุบันสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่มใหญ่ ๆ กล่าวคือ วิธี Octree/Quadtree [4,5] ซึ่งหลักการโดยสำคัญของวิธีดังกล่าวเริ่มต้นด้วยการสร้างสี่เหลี่ยมครอบโดเมนจะเรียกสี่เหลี่ยมดังกล่าวว่า Root จากนั้นจึงทำการแบ่งพื้นที่ของสี่เหลี่ยมให้เล็กลงจากสี่เหลี่ยมหนึ่งรูปเป็นสี่เหลี่ยมสี่รูป และเรียกสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นจาก Root ว่า Leaf ซึ่งเป็นแนวคิดคล้ายกับแผนภูมิต้นไม้ไบนารี (Binary tree) ถัดไปก็จะเป็นการตรวจสอบด้านของสี่เหลี่ยมที่ติดกับขอบของโดเมน ก็ให้ทำการคำนวณจุดตัดและแทรกจุดต่อลงตรงจุดตัดดังกล่าว และลบทิ้งของของตาข่ายสี่เหลี่ยมที่อยู่นอกโดเมน ลำดับสุดท้ายก็จะเป็นการแบ่งสี่เหลี่ยมที่ได้ออกเป็นตาข่ายสามเหลี่ยมสองรูป ส่วนวิธี Advancing Front [6,7] จะเริ่มต้นด้วยการสร้างจุดต่อตามขอบของโดเมนจากนั้นให้เลือกเส้นต่อระหว่างจุดต่อขึ้นมาหนึ่งเส้น เรียกว่า Front เพื่อทำการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมด้านเท่าขึ้นมา แล้วทำการลบทิ้ง Front ดังกล่าวออกจากบัพเฟอร์ พร้อมทั้งกำหนดให้เส้นขอบที่เหลืออีกสองด้านของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่เป็น Front สำหรับเลือกใช้ในอนาคตโดยเก็บใส่ลงในบัพเฟอร์ และกระบวนการเลือก Front แล้วสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมจะดำเนินไปเรื่อยๆจากขอบของโดเมนเข้าสู่พื้นที่ด้านในของโดเมน และสุดท้ายวิธี Delaunay triangulation เป็นวิธีการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมที่ได้รับความนิยมมากที่สุด [8] เนื่องจากสามารถที่จะให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพค่อนข้างดีอันเนื่องมาจากเงื่อนไขของเดอลอนเน่ หรือเรียกอีกอย่างว่าคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่า (Empty circumcircle) อันเนื่องมาจากตาข่ายสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ จะต้องเป็นตาข่ายสามเหลี่ยมที่จุดปลายทั้งสามต้องไม่อยู่

ภายในวงกลมที่ล้อมรอบและลากผ่านจุดปลายทั้งสามของตาข่ายสามเหลี่ยมอื่น ซึ่งเป็นหลักการที่สำคัญของเทคนิคการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงทำให้สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในที่เล็กที่สุดโตกว่าสามเหลี่ยมที่สร้างโดยวิธีอื่น ๆ

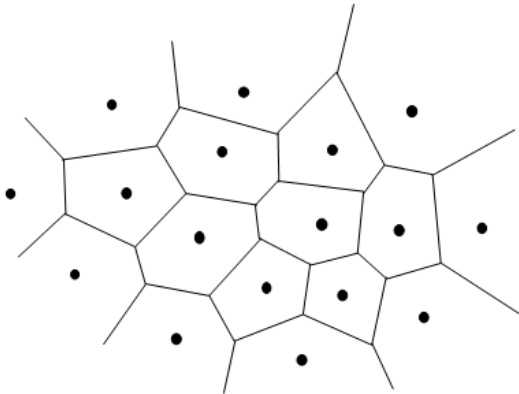
สำหรับบทความนี้จะนำเสนอกระบวนการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในสองมิติอันประกอบด้วยเทคนิควิธีการสร้างตาข่าย เทคนิคการสร้างจุดต่อ เทคนิคการทำให้ตาข่ายสม่ำเสมอ และเทคนิคการปรับตัวได้โดยอัตโนมัติ นอกจากนี้เทคนิคการปรับตัวได้โดยอัตโนมัติได้ถูกพัฒนาขึ้นมาใหม่ และทำการผนวกเข้ากับการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่เพื่อใช้เพิ่มความแม่นยำของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม เทคนิคดังกล่าวจะสร้างตาข่ายขึ้นมาใหม่โดยขึ้นกับผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองโดยใช้ตาข่ายของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม สุดท้ายสมรรถนะของกระบวนการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบจะถูกประเมินด้วยปัญหาทางกลศาสตร์การคำนวณต่าง ๆ

2. การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

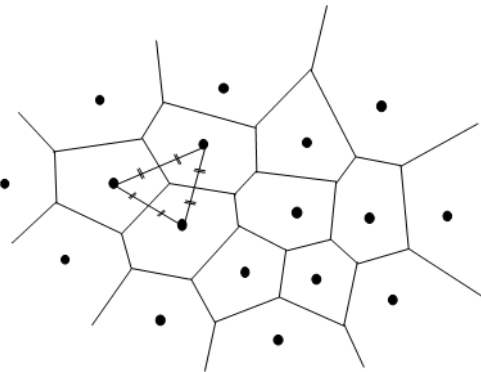
การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ สามารถที่จะดำเนินการภายหลังจากที่ทำการสร้างแผนผังโวโรนอยเสร็จเรียบร้อยแล้ว ซึ่งแผนผังโวโรนอยเป็นพื้นที่รูปทรงหลายเหลี่ยมล้อมรอบจุดที่กำหนด ดังนั้น จึงสามารถกล่าวได้ว่าแผนผังโวโรนอยเป็นรูปทรงทางเรขาคณิตที่มีความเป็นคู่กับสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงขอกกล่าวถึงนิยามและคุณสมบัติพื้นฐานของแผนผังโวโรนอยและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับระนาบในสองมิติ เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ต่อไป

แผนผังโวโรนอย (Voronoi diagram) ถูกนำเสนอและนำมาขยายความสู่การสร้างแผนผังโวโรนอยโดย โวโรนอย (Voronoi) และดิริคเลท (Dirichlet) [9,10] โดยนิยามในด้านเรขาคณิตการคำนวณแผนผังโวโรนอย หมายถึง แผนผังที่ได้จากการแบ่งโดเมนออกเป็นกลุ่มของรูปทรงหลายเหลี่ยม โดยถ้าหากกำหนดให้มีจุดต่อภายในโดเมน $P_k, k = 1, \dots, n$ เรา

สามารถที่สร้างพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม $V_k, k = 1, \dots, n$ ล้อมรอบจุดต่อดังกล่าว โดยแต่ละพื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมจะล้อมรอบจุดต่อเพียงจุดเดียว ซึ่งจะทำให้ระยะห่างตั้งฉากจากจุดต่อไปยังขอบของรูปทรงหลายเหลี่ยมจะเป็นระยะทางที่สั้นที่สุด เมื่อเทียบกับระยะห่างจากจุดต่อของพื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมที่ลากมายังขอบของรูปทรงหลายเหลี่ยมดังกล่าว ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แผนผังโวโรนอยของจุดต่อภายในโดเมน



รูปที่ 2 ระยะห่างที่เท่ากันของระยะทางจากจุดต่อมายังเส้นขอบเขตร่วม

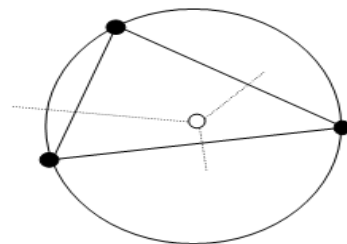
ดังนั้นจากนิยามข้างต้น ความหมายของแผนผังโวโรนอยของจุด p ใด ๆ (พื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมล้อมรอบจุดต่อ p ใด ๆ) สามารถเขียนในรูปแบบของสมการเซตได้ ดังนี้

$$V_k = \{p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |p - P_k| < |p - P_j|, \forall k \neq j\} \quad (1)$$

จากสมการ (1) สามารถกล่าวได้ว่าเส้นขอบเขตของแผนผังโวโรนอยแต่ละด้านต้องวางอยู่ต้องกึ่งกลางระหว่างจุดต่อสองจุดต่อที่เส้นขอบเขตดังกล่าวเป็นเส้นขอบเขตร่วม ดังแสดงในรูปที่ 2 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าระยะทางจากจุดใด ๆ บนเส้นขอบเขตของแผนผังโวโรนอยไปยังจุดต่อทั้ง

สองด้านต้องมีค่าเท่ากันเสมอและถ้าหากพิจารณาจากจุดใด ๆ ภายในโดเมนสองมิติ $p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ตามนิยามของแผนผังโวโรนอยต้องไม่มีจุดต่อมากกว่า 1 จุดอยู่ในบริเวณพื้นที่ที่โวโรนอยเดียวกัน แต่ถ้าหากมีจุด p ใดก็ตามที่ถูกเป็นเจ้าของโดยมากกว่าหนึ่งพื้นที่ที่โวโรนอย จุด p ดังกล่าวต้องอยู่บนเส้นขอบเขตของพื้นที่ที่โวโรนอยเสมอ

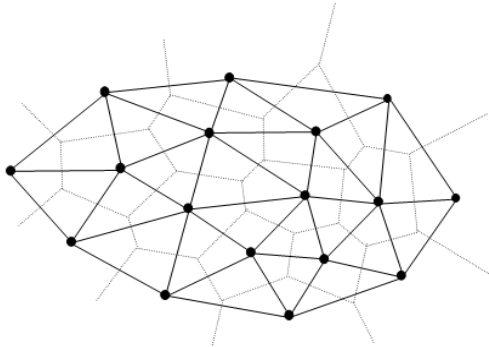
เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2 การลากเส้นตรงต่อเชื่อมระหว่างจุดต่อ 3 จุดที่อยู่ในพื้นที่ที่โวโรนอยที่มีเส้นขอบเขตร่วมเดียวกันก็จะได้รูปทรงสามเหลี่ยม โดยคุณสมบัติของรูปทรงสามเหลี่ยมดังกล่าว คือ เส้นขอบทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยมเป็นเส้นที่แบ่งระยะทางกึ่งกลางของระยะทางระหว่างจุดต่อทั้งสองของสองพื้นที่ที่โวโรนอยที่มีเส้นขอบเขตร่วมเดียวกัน รูปทรงสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากกระบวนการดังกล่าวจะถูกเรียกว่าสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangle) ในทางทฤษฎีสามเหลี่ยมเดอลอนเน่จะถูกนิยามให้เป็นกราฟ (Graph) โดยเมื่อลากวงกลมล้อมรอบผ่านจุดปลายทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยม จะต้องไม่มีจุดอื่นใดอยู่ในวงกลมดังกล่าว ยกเว้นจุดปลายทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยมเองซึ่งจะอยู่บนเส้นรอบวงกลม คุณสมบัติดังกล่าวของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ถูกเรียกว่าคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่า (Empty circumcircle) [11] คุณสมบัติดังกล่าวเป็นคุณสมบัติที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งและสามารถนำมาใช้เป็นเงื่อนไขในการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ จากจุดต่อทั้งหมดภายในโดเมน



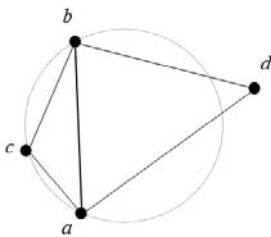
รูปที่ 3 ตัวอย่างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และคุณสมบัติวงกลมว่างเปล่า

รูปที่ 3 แสดงตัวอย่างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบผ่านจุดปลายทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยม หมายถึง จุดปลายของแผนผังโวโรนอย ซึ่งถูกแสดงด้วยวงกลมโปร่ง และในทางปฏิบัติจุดศูนย์กลาง

ดังกล่าวสามารถที่จะอยู่ภายในหรือภายนอกพื้นที่ของรูปทรงสามเหลี่ยมก็ได้ ดังนั้น เมื่อทำการลากเส้นตรงต่อเชื่อมระหว่างสองจุดต่อที่มีเส้นขอบเขตของพื้นที่ไวโรนอยร่วมกันทั้งหมดภายในแผนผังไวโรนอย ก็จะได้รูปทรงสามเหลี่ยมที่เรียกว่า สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ดังตัวอย่างในรูปที่ 4 [12]



รูปที่ 4 แผนผังไวโรนอยและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

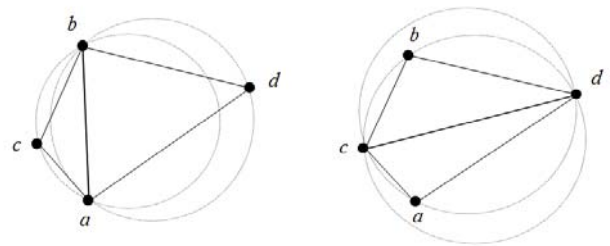


รูปที่ 5 เส้นขอบเขต ab มีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่

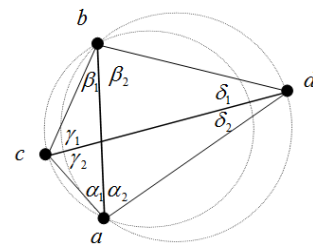
เมื่อพิจารณาถึงการแบ่งพื้นที่โดเมนออกเป็นรูปทรงสามเหลี่ยมใด ๆ สามเหลี่ยมที่ได้จะประกอบด้วยจุดปลายและเส้นขอบเขตของสามเหลี่ยม โดยเส้นขอบเขตของสามเหลี่ยม มีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่ (Locally Delaunay) ก็ต่อเมื่อ เส้นขอบเขตที่เป็นสมาชิกของสามเหลี่ยมเพียงสามเหลี่ยมเดียว ต้องเป็นเส้นขอบเขตของโดเมน และเส้นขอบเขตที่เป็นสมาชิกของสองสามเหลี่ยม เช่นดังตัวอย่างในรูปที่ 5 เส้นขอบเขต ab เป็นสมาชิกของสามเหลี่ยม abc และ adb จุด d ต้องอยู่ภายนอกวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม abc เสมอ เส้นขอบเขต ab จึงจะมีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่ และถ้าหากเส้นขอบเขตของสามเหลี่ยมทุก ๆ เส้นภายในโดเมนมีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่ สามเหลี่ยมทั้งหมดภายในโดเมนเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

จากรูปที่ 5 เมื่อรวมสามเหลี่ยม abc และ adb เข้าด้วยกัน ก็จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมแหลม adbc (Convex quadrilateral) และเมื่อทำการแบ่งสี่เหลี่ยมมุมแหลมออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูป

สามารถกระทำได้ 2 วิธี วิธีแรกเป็นการแบ่งสี่เหลี่ยมมุมแหลมด้วยเส้น ab ซึ่งจะได้สามเหลี่ยม abc และ adb ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ส่วนวิธีที่สองเป็นการแบ่งสี่เหลี่ยมมุมแหลมด้วยเส้น cd ซึ่งจะได้สามเหลี่ยม adc และ bcd ซึ่งไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ดังนั้น การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่จากสี่เหลี่ยมใด ๆ สามารถกระทำได้โดยการกลับเส้นขอบเขตร่วมของสามเหลี่ยมสองรูปที่อยู่ติดกัน ดังเช่นในกรณีของรูปที่ 6 สามเหลี่ยม adc และ bcd สามารถแปลงให้เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ได้ด้วยการกลับเส้นขอบเขตร่วมของสามเหลี่ยมทั้งสอง จากเส้น cd มาเป็นเส้น ab เป็นต้น กระบวนการดังกล่าวสามารถประยุกต์ใช้กับสามเหลี่ยมใด ๆ ภายในโดเมนสองมิติ โดยสามเหลี่ยมที่ได้จะเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่เสมอ ซึ่งกระบวนการดังกล่าวถูกเรียกว่า อัลกอริทึมการกลับด้าน (Edge-flip algorithm) [8]



รูปที่ 6 ซ้ายมือสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และขวามือไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่



รูปที่ 7 มุมภายในสามเหลี่ยม

เมื่อพิจารณารูปที่ 7 สามเหลี่ยม adc และ bcd ซึ่งไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ มีมุมภายในดังนี้ $\alpha_1 + \alpha_2, \delta_2, \gamma_2$ และ $\beta_1 + \beta_2, \gamma_1, \delta_1$ ตามลำดับ ส่วนสามเหลี่ยม abc และ adb ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่มีมุมภายในดังนี้ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 + \gamma_2$ และ $\alpha_2, \delta_1 + \delta_2, \beta_2$ ตามลำดับ โดยอาศัยความรู้ด้านเรขาคณิตเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมมุมแหลม abcd และมุมภายในที่เกิดจากด้านทั้งสี่ พบว่า

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq \delta_1 \\ \beta_1 &\geq \delta_2 \\ \gamma_2 &\geq \beta_2 \\ \gamma_1 &\geq \alpha_2 \end{aligned} \tag{2}$$

การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ สามารถแบ่งออกได้เป็นสองขั้นตอนหลัก ๆ ดังนี้ ขั้นตอนที่หนึ่งเป็นการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ให้กับจุดที่อยู่บนเส้นขอบเขตของโดเมน (Boundary triangulation) และขั้นตอนที่สองเป็นการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ภายในโดเมนโดยการแบ่งย่อยสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากขั้นตอนที่หนึ่ง ด้วยวิธีการสร้างจุดต่อภายในโดเมนแบบอัตโนมัติ (Automatic node insertion) โดยดำเนินการพร้อม ๆ กับการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อที่มีอยู่แล้วกับจุดต่อที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ เพื่อป้องกันการเกิดสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบนราบจนเกินไป (Sliver triangle) ซึ่งจะมีผลต่อความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สำหรับอัลกอริทึมในการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในบทความนี้จะอ้างอิงถึงอัลกอริทึมที่พัฒนาโดยโบว์เยอร์และวัตสัน (Bowyer and Watson) [9,10] ซึ่งได้นำเสนอวิธีการทดสอบจุดต่อภายในวงกลม (In-circle test) มาใช้ในการทดสอบคุณสมบัติเดอลอนเน่ของสามเหลี่ยม โดยการแทรกจุดต่อลงในโดเมนที่ถูกแบ่งด้วยสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ทั้งหมดก่อนการแทรกจุดต่อ $p(T_i)$ และสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ทั้งหมดภายหลังการแทรกจุดต่อ $p(T_{i+1})$ ดังนี้

$$T_{i+1} = T_i - C_p + B_p \tag{3}$$

โดยที่ C_p หมายถึง เซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกลบทิ้งซึ่งทำให้เกิดพื้นที่ว่าง และ B_p หมายถึง เซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ด้วยการลากเส้นต่อจากจุดต่อทั้งหมดของพื้นที่ว่างมายังจุดต่อ p

อัลกอริทึมการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (DelaunayTriangulation) ประกอบด้วยกระบวนการหลัก ๆ สองประการ ดังนี้ ประการที่หนึ่งการแบ่งจุดต่อบนเส้นขอบเขตของโดเมน และประการที่สองการลากเส้นเชื่อมโยงจุดต่อดังกล่าวเพื่อแบ่งพื้นที่ของโดเมนออกเป็นสามเหลี่ยม

ภายใต้เงื่อนไขสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ดังแสดงในอัลกอริทึมที่ 1 ข้างล่าง

อัลกอริทึมที่ 1 DelaunayTriangulation(P, T, p)

1. กำหนดให้ $P, k = 1, \dots, n$ เป็นเซตของจุดต่อทั้งหมดบนเส้นขอบเขตของโดเมน โดยลำดับของจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายนอกของโดเมนจะต้องจัดเก็บตามลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา ถ้าหากเป็นจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายในของโดเมน และจัดเก็บตามลำดับแบบตามเข็มนาฬิกา และกำหนดให้ T เป็นเซตว่างของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่
2. กำหนดให้ p_i เป็นจุดต่อหมายเลข i ของเซต P และ t_i เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่หมายเลข i ของเซต T
3. สร้างสามเหลี่ยมเริ่มต้นล้อมรอบจุดทั้งหมดของเซต P และกำหนดให้เป็นสมาชิกของเซต T
4. อ่านจุดต่อ p_i ลำดับถัดไปจากเซต P
5. ค้นหาสามเหลี่ยม t_i ของเซต T ที่บรรจุจุดต่อ p_i ภายในซึ่งสามารถกระทำได้โดยใช้วิธีของลอว์สัน (Lawson searching method) [11]
6. ลบทิ้งสามเหลี่ยม t_i ทั้งหมดที่ไม่ผ่านคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่าออกจากเซต T จากนั้นทำการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ขึ้นมาใหม่ด้วยวิธีที่ได้อธิบายหัวข้อ 3.2.1 ข้างต้น และกำหนดให้สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกสร้างขึ้นใหม่เป็นสมาชิกของเซต T
7. ทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 4 ถึง 6 จนกระทั่งจุดต่อทั้งหมดของเซต P ถูกพิจารณา
8. ลบทิ้งสามเหลี่ยมทั้งหมดที่อยู่ภายนอกโดเมน ซึ่งประกอบด้วยสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดต่อร่วมกับจุดต่อของสามเหลี่ยมเริ่มต้น หรือสามเหลี่ยมที่มีจุดต่อทั้งหมดอยู่บนเส้นขอบเขตภายในของโดเมน และเป็นสามเหลี่ยมที่มีผลคูณไขว้ (Cross product) ของด้านร่วมทั้งสองของสามเหลี่ยมมีค่าน้อยกว่าศูนย์

สำหรับการสร้างจุดต่อภายในโดเมนสำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้เทคนิคที่แนะนำในเอกสารอ้างอิง [14] โดยการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ จะถูกควบคุมด้วยพารามิเตอร์ที่สำคัญสองตัว คือ สัมประสิทธิ์อัลฟา (α) เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อ

ที่ต้องการแทรกและจุดต่อทั้งสามของสามเหลี่ยม ซึ่งจะมีผลต่อความหนาแน่นของสามเหลี่ยม ส่วนสัมประสิทธิ์เบต้า (β) เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการทดสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อในบริเวณใกล้เคียงที่มีอยู่แล้วกับจุดต่อที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ ซึ่งจะมีผลต่อรูปร่างของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ หลังจากจุดต่อที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ภายในโดเมนผ่านการทดสอบด้วยค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสอง สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ก็จะถูกสร้างขึ้นใหม่ด้วยอัลกอริทึม Delaunay Triangulation ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นทุกประการ โดยอัลกอริทึมสำหรับการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ (MeshRefinement) มีดังนี้

อัลกอริทึมที่ 2 MeshRefinement($P, T, \alpha, \beta, iteration$)

1. กำหนดให้ $P, k = 1, \dots, n$ เป็นเซตของจุดต่อทั้งหมดบนเส้นขอบเขตโดเมน โดยลำดับของจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายนอกของโดเมนต้องจัดเก็บตามลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา และจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายในของโดเมนต้องจัดเก็บตามลำดับแบบตามเข็มนาฬิกา
2. กำหนดให้ V เป็นเซตว่างของจุดต่อที่จะถูกแทรกลงในโดเมน และ T เป็นเซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากอัลกอริทึม Delaunay Triangulation
3. กำหนดค่าระยะห่างของจุดต่อ (Nodal spacing value, dp_i) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของระยะห่างระหว่างจุดต่อที่มีด้านเชื่อมต่อกับจุดปลายของสามเหลี่ยม โดยค่าดังกล่าวจะเป็นค่าประจำของทุก ๆ จุดต่อภายในโดเมน ดังนี้

$$dp_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |p_j - p_i| \quad (4)$$

โดยที่ M หมายถึงจุดต่อรอบ ๆ จุดต่อ i

4. อ่านสามเหลี่ยม t_i จากเซต T
5. กำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยม t_i เป็นจุดต่อ Q กำหนดค่าระยะห่างของจุดต่อ Q ด้วยสมการ (4) และกำหนดระยะห่างจากจุดต่อ Q ไปยังจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยม t_i (d_m โดยที่ $m = 1, 2, 3$)
6. ทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ α โดยถ้าหาก $d_m < (\alpha \cdot dp_q)$ สำหรับบางค่าของ $m = 1, 2, 3$ แสดงว่าจุดต่อ Q ไม่ผ่านการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ α ก็ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 4 เพื่ออ่านสามเหลี่ยมถัดไป

7. กำหนดระยะห่าง s_j จากจุดต่อ Q ไปยังจุดต่อที่ถูกแทรกก่อนหน้านี้ สมมติให้เท่ากับจำนวน N จุดต่อ
8. ทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ β โดยถ้าหาก $s_j < (\beta \cdot dp_q)$ สำหรับบางค่าของ $j = 1, \dots, N$ แสดงว่าจุดต่อ Q ไม่ผ่านการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ β ก็ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 4 เพื่ออ่านสามเหลี่ยมถัดไป
9. จัดเก็บจุดต่อ Q ลงในเซต V
10. ถ้าหากยังคงมีสามเหลี่ยมที่ยังไม่ถูกอ่านจากเซต T ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 4 เพื่ออ่านสามเหลี่ยมถัดไป
11. ทำการแทรกจุดทั้งหมดในเซต V ลงในโดเมน และสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม Delaunay Triangulation ข้างต้น
12. ทำการวนซ้ำขั้นตอนที่ 4 ถึง 11 เท่ากับจำนวนครั้งที่กำหนดโดยพารามิเตอร์ $iteration$

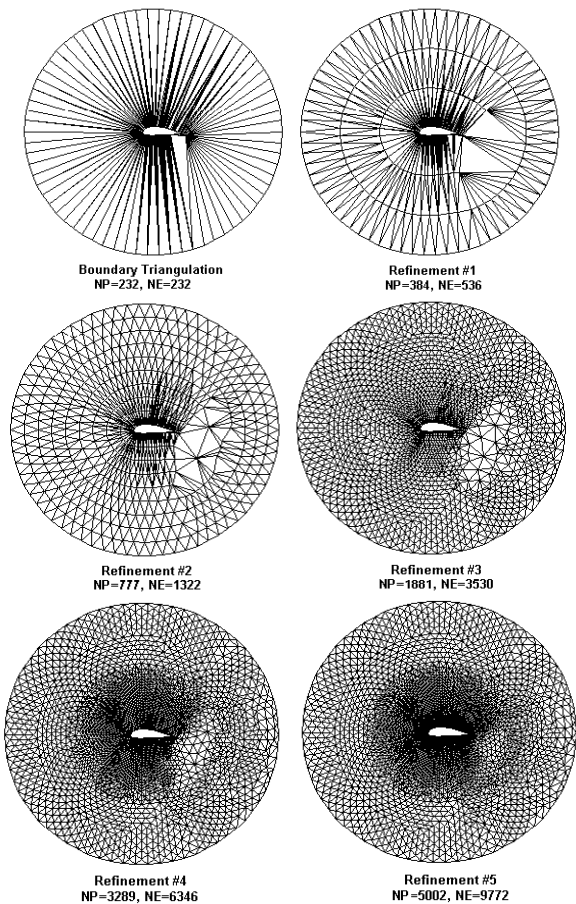
โดยปกติสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากการสร้างด้วยอัลกอริทึมทั้งสองข้างต้น อาจจะยังไม่มีค่าสัดส่วนของด้านยาวที่สุดและด้านที่ตั้งฉากกัน (Aspect ratio) ที่ดีเพียงพอ ดังนั้นจึงควรที่จะทำการปรับปรุงรูปร่างของสามเหลี่ยมให้ดีขึ้น โดยการทำให้ค่าสัดส่วนของด้านยาวที่สุดและด้านที่ตั้งฉากกัน ของแต่ละสามเหลี่ยมมีค่าใกล้เคียงกันด้วยวิธีลาปลาซ (Laplacian smoothing) ซึ่งเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมาก [12] เนื่องจากทำให้ได้สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดีขึ้นและเป็นวิธีที่สามารถที่จะทำงานได้รวดเร็ว การปรับปรุงรูปร่างของสามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซ เป็นการย้ายตำแหน่งพิกัดของจุดต่อที่ถูกล้อมรอบด้วยจุดต่ออื่นๆ ไปยังตำแหน่งพิกัดที่ได้จากค่าเฉลี่ยของตำแหน่งพิกัดของจุดต่อที่ล้อมรอบ เช่น สมมติว่าต้องการประยุกต์วิธีลาปลาซกับจุดต่อ Q ซึ่งถูกล้อมรอบโดยจุดต่อ M จุด

$$x_{Qc} = \frac{\sum_{i=1}^M x_i}{M} \quad \text{and} \quad y_{Qc} = \frac{\sum_{i=1}^M y_i}{M} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

โดยที่ x_{Qc} และ y_{Qc} เป็นตำแหน่งพิกัดใหม่ของจุดต่อ Q ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

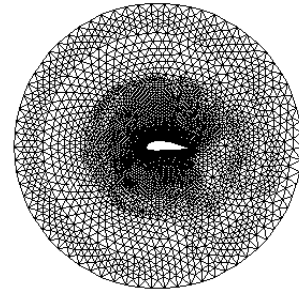
3. ตัวอย่าง

เพื่อให้เห็นถึงสมรรถนะของอัลกอริทึมที่ได้นำเสนอในบทความนี้ โดเมนของปัญหาทางกลศาสตร์การคำนวณที่ประกอบด้วยรูปทรงที่มีความซับซ้อนจำนวน 5 ตัวอย่างจะถูกเลือกเพื่อใช้ในการทดสอบสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมด้วยเทคนิคการสร้างสามเหลี่ยมเคลื่อนที่ ตัวอย่างที่ 1 เป็นการแสดงขั้นตอนการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมที่ถูกกำหนดให้ทำการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ 5 ครั้ง ($iteration = 5$) ภายในโดเมนวงกลมล้อมรอบรูปทรง Airfoil ดังแสดงในรูปที่ 8 ซึ่งจะเห็นว่าตาข่ายสามเหลี่ยมจะถูกทำให้มีขนาดเล็กลงทุกครั้งที่มีการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติในแต่ละรอบ โดยตัวอย่างนี้จะกำหนดค่าตัวแปร $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 0.6$



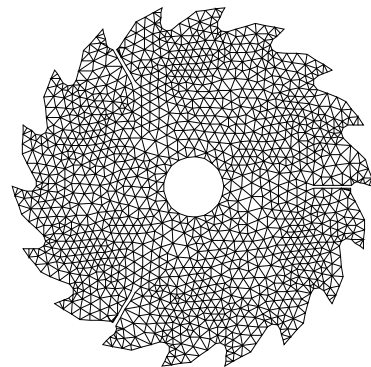
รูปที่ 8 การสร้างสามเหลี่ยมภายในโดเมนวงกลมล้อมรอบรูปทรง Airfoil

และรูปที่ 9 แสดงตาข่ายสามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดีขึ้น ภายหลังจากประยุกต์ใช้วิธีลาปลาซ โดยกำหนดให้มีการวนซ้ำ 4 รอบ



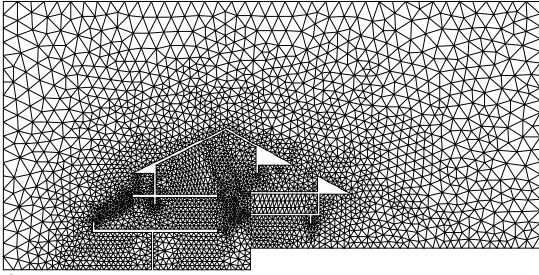
รูปที่ 9 ตาข่ายสามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดีขึ้น

ตัวอย่างที่ 2 เป็นตัวอย่างการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนซึ่งเป็นรูปทรงของใบเลื่อยดังแสดงในรูปที่ 10 ซึ่งเป็นรูปทรงที่มีความซับซ้อนกว่าตัวอย่างที่ผ่านมา จากรูปดังกล่าวจะเห็นว่าตาข่ายสามเหลี่ยมที่ได้มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งเป็นตาข่ายสามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดีที่สุด



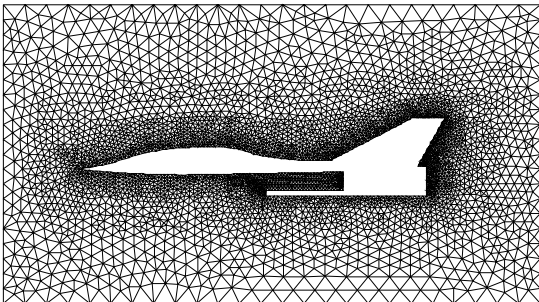
รูปที่ 10 ตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนรูปทรงใบเลื่อย

ตัวอย่างที่ 3 เป็นตัวอย่างการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนรูปบ้านซึ่งสามารถนำมาใช้ในการคำนวณทางด้านพลศาสตร์ของไหลดังแสดงในรูปที่ 11 โดเมนของตัวอย่างนี้ไม่ซับซ้อนแต่สามารถสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมได้ยากกว่าสองตัวอย่างที่ผ่านมา เพราะลักษณะของเส้นขอบโดเมนที่แคบและยาว จะก่อให้เกิดตาข่ายสามเหลี่ยมที่มีขนาดแตกต่างกันมาก



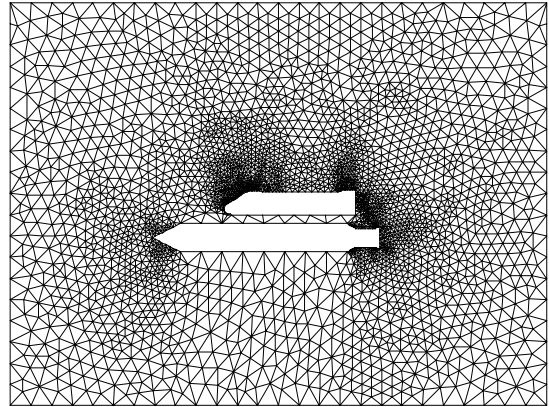
รูปที่ 11 ตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนรูปบ้าน

ตัวอย่างที่ 4 เป็นตัวอย่างการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนสี่เหลี่ยมล้อมรอบเครื่องบินรูปดังแสดงในรูปที่ 12 จากรูปจะเห็นว่าลักษณะของเส้นขอบโดเมนที่แคบและยาว จะก่อให้เกิดตาข่ายสามเหลี่ยมที่มีขนาดแตกต่างกันมาก เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ผ่านมา



รูปที่ 12 ตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนของเครื่องบินรบ

ตัวอย่างที่ 5 ซึ่งเป็นตัวอย่างสุดท้ายเป็นการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนสี่เหลี่ยมล้อมรอบกระสวยอวกาศพร้อมถังเชื้อเพลิงดังแสดงในรูปที่ 13 ตัวอย่างนี้แสดงศักยภาพของอัลกอริทึมที่ถูกนำเสนอในการสร้างตาข่ายสามเหลี่ยมสำหรับโดเมนที่มีขอบเขตมากกว่าหนึ่งขอบเขต (ขอบเขตของกระสวยอวกาศ และขอบเขตของถังเชื้อเพลิง) จากรูปดังกล่าวจะเห็นว่าตาข่ายสามเหลี่ยมที่ได้มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งเป็นตาข่ายสามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดีที่สุด



รูปที่ 13 ตาข่ายสามเหลี่ยมภายในโดเมนของเครื่องบินรบ

4. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ (MTEC) ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์สนับสนุนในการดำเนินงานวิจัยนี้

5. เอกสารอ้างอิง

- [1] O. Maneesai and P. Tuengsook, “An Investigation Shear Surface on Semi-Piercing with Finite Element Method”, The Journal of Industrial Technology, 7, 2011, pp. 1-8.
- [2] K. Rattanachan, S. Chatakorn and S. Dechjarem, “Die Design and Deep Drawing Process Analysis of Sheet Metal Filter Housing Production by CAD/CAE”, The Journal of Industrial Technology, 1, 2548, pp. 1-6.
- [3] S. Suranuntchai, “Finite Element Prediction of Damage in Bulk Metal Forming Based on Lemaitre’s Damage Mechanics Model”, The Journal of Industrial Technology, 2, 2549, pp. 7-13.
- [4] M.A. Yerry and M.S. Shephard, “Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20, 1984, pp. 1965-1990.
- [5] M.S. Shephard and M.K. Georges, “Three-Dimensional Mesh Generation by Finite Octree Technique”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32, 1991, pp. 709-749.

- [6] R. Lohner, "Progress in Grid Generation via the Advancing Front Technique", *Engineering with Computers*, 12, 1996, pp. 186-210.
- [7] S.H. Lo, "Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces" *Computers and Structures*, 39, 1991, pp. 493-500.
- [8] S.J. Owen, "A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology", Pittsburgh, Carnegie Mellon University, 1998.
- [9] A. Bowyer, "Computing Dirichlet Tessellations", *The Computer Journal*, 24, 1981, pp. 162-166.
- [10] D.F. Watson, "Computing the n-dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes", *The Computer Journal*, 24, 1981, pp. 167-172.
- [11] H. Edelsbrunner, "Triangulations and Meshes in Computational Geometry", *Acta Numerica* 2000, p.p. 133-213.
- [12] S. Phongthanapanich and P. Dechaumphai, "Adaptive Finite Element Method for Crack Propagation Analysis", *The Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 19, 2009, pp. 154-163.
- [13] S.W. Sloan, "A Fast Algorithm for Generating Constrained Delaunay Triangulations", *Computers and Structures*, 47, 1993, pp. 441-450.
- [14] B.K., Karamete, T., Tokdemir and M. Ger, "Unstructured Grid Generation and A Simple Triangulation Algorithm for Arbitrary 2-D Geometries using Object Oriented Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1997, pp. 251-268.