



สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ใช้โดเมนสม่าเสมอแบบเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าสำหรับ ปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติ

ณัฐยา เสียงใส กำธรเกียรติ มุสิกเกต* บุญชัย ผึ้งไผ่งาม สุธี ปิยะพิพัฒน์ และ ศุภสิทธิ พงศ์ศิวะสถิตย์

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

พงศ์พิชญ์ ต่วนภูษา

ภาควิชาวิศวกรรมเกษตร คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08 7380 8222 อีเมล: kamtornkiat@rmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2022.01.005

รับเมื่อ 8 เมษายน 2564 แก้ไขเมื่อ 10 มิถุนายน 2564 ตอรับเมื่อ 9 กรกฎาคม 2564 เผยแพร่ออนไลน์ 19 มกราคม 2565

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแบ่งเอลิเมนต์หลักเป็นรูปหลายเหลี่ยมซึ่งมีการแบ่งโดเมนย่อยสม่าเสมอภายในเอลิเมนต์หลักนั้น ออกเป็นเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า โดเมนขอบเขตของปัญหาซึ่งถูกแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมนั้น ถูกสร้างขึ้นมาจากการแปลงของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมจากขั้นตอนการสร้างโครงตาข่ายของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับโดเมนสม่าเสมอนั้น เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าถูกสร้างขึ้นเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม ความเค้นในระนาบสองมิติของคานยื่นปลายรับแรงเฉือนพาราโบลาที่ปลายคานอิสระถูกใช้เป็นปัญหามาตรฐานสำหรับการตรวจสอบความสามารถของวิธีนี้ ผลตอบสองของคาน ได้แก่ ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและความเค้น ซึ่งได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลจากการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์และทางทฤษฎี ถึงแม้ว่าผลจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ได้มีค่าอยู่ระหว่างผลจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ T3 และ Q4 ในช่วงของโครงตาข่ายที่มีความละเอียดต่ำ ความแม่นยำในการคำนวณ และเข้าใกล้ค่าทางทฤษฎีที่มากกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ได้จากการใช้ความละเอียดสุดของโครงตาข่ายเป็น 48×12 ในมุมมองของผู้วิจัยเชื่อว่า การไม่ต้องทำ Mapping ระหว่าง Physical และ Parent Elements และความยืดหยุ่นของการใช้รูปหลายเหลี่ยมสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับรูปร่างหรือขอบเขตที่มีความซับซ้อนหรือในบริเวณที่มีความไม่เข้ากันของโครงตาข่ายได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ: ความเค้นในระนาบสองมิติ คานยื่นปลาย แรงเฉือนพาราโบลา เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม โดเมนย่อยสม่าเสมอ สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ เอลิเมนต์ทรงสี่หน้า

การอ้างอิงบทความ: ณัฐยา เสียงใส, กำธรเกียรติ, มุสิกเกต, บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, สุธี ปิยะพิพัฒน์, ศุภสิทธิ พงศ์ศิวะสถิตย์ และ พงศ์พิชญ์ ต่วนภูษา, "สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ใช้โดเมนสม่าเสมอแบบเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติ," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 33, ฉบับที่ 2, หน้า 526-537, เม.ย.-มิ.ย. 2566.



Polygonal Cell-based Smoothed Finite Element Using Quadrilateral Smoothing Domains for 2D Plane Stress Problem

Nuttaya Siengsai, Kamtornkiat Musiket*, Boonchai Puangpaingam, Suthee Piyapiphat and Supasit Pongsivasathit
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineer, Rajamangala University of Technology Thunyaburi, Pathum Thani, Thailand
Pongpitch Tuanpusa

Department of Agricultural Engineering, Faculty of Engineer, Rajamangala University of Technology Thunyaburi,
Pathum Thani, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 08 7380 8222, E-mail: kamtornkiat@rmutt.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2022.01.005

Received 8 April 2021; Revised 10 June 2021; Accepted 9 July 2021; Published online: 19 January 2022

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

Abstract

This study investigated the polygonal cell-based smoothed finite element divided to quadrilateral smoothing domains. Problem domain, discretized to n-sided polygonal elements, is constructed by transformation of triangular or quadrilateral elements. For smoothing cells, quadrilateral elements are equally created according to number of polygonal element sides. Cantilever two-dimensional plane stress beam subjected to parabolic shear traction at free end is utilized as a benchmark problem to validate the capability of this method. Beam's responses including displacements and stresses obtained from numerical analysis are compared to both FEM and analytical solutions. Despite the fact that the results obtained from this method arranged between the results from T3 and Q4 finite element method as coarse mesh, more accuracy than finite element results and closed to analytical solutions can be achieved at the finest 48×12 mesh. Since there is no mapping between physical and parent element, the flexibility of using polygonal cell-based smoothed finite element can be employed to complex regions/shapes or non-meshing areas efficiently, in author's perspective.

Keywords: Cantilever Beam, Parabolic Shear Traction, n-sided Polygonal Element, Cell-based Smoothed Finite Element

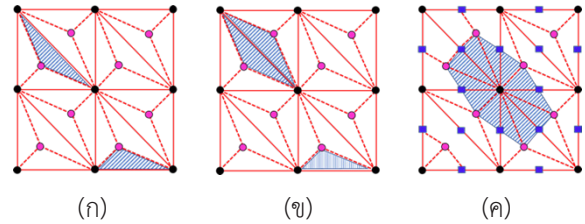
Please cite this article as: N. Siengsai, K. Musiket, B. Puangpaingam, S. Piyapiphat, S. Pongsivasathit, and P. Tuanpusa, "Polygonal cell-based smoothed finite element using quadrilateral smoothing domains for 2D plane stress problem," *The Journal of KMUTNB*, vol. 33, no. 2, pp. 526–537, Apr.–Jun. 2023 (in Thai).

1. บทนำ

การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบดั้งเดิมนั้น อาศัยการใช้เอลิเมนต์พื้นฐานแบบรูปสามเหลี่ยม (Triangular Elements) และรูปสี่เหลี่ยม (Quadrilateral Elements) เป็นหลัก ความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ จึงขึ้นอยู่กับลักษณะ และคุณภาพของเอลิเมนต์ที่นำมาใช้ เมื่อต้องการความละเอียดในการคำนวณที่สูงขึ้น จึงมีความจำเป็นที่จะต้องอาศัยกระบวนการทำซ้ำโครงตาข่าย (Re-meshing) ให้มีความละเอียดมากขึ้นตามไปด้วย ในกรณีที่ขอบเขตของปัญหาามีขนาดใหญ่ นั้น ทางเลือกอีกอย่างหนึ่งคือ เลือกใช้โครงตาข่ายขนาดเล็กเฉพาะบริเวณที่สนใจเพื่อลดเวลา และค่าใช้จ่ายของการคำนวณ

การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ (Smoothed Finite Element Methods; SFEM) นั้น ถูกคิดค้นโดย Liu และคณะ [1] ซึ่งเป็นการพัฒนาแนวความคิดของการสร้างสนามความเครียดแบบสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field) ที่แตกต่างออกไปจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม ซึ่งสร้างสนามความเครียดแบบที่เรียกว่าสนามความเครียดแบบสอดคล้องกัน (Compatible Strain Field) เพื่อใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมประเภทต่างๆ ให้ได้รับความละเอียดแม่นยำที่สูงขึ้น รูปแบบของการสร้างโดเมนย่อย หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอสำหรับปัญหาในระนาบสองมิตินั้น สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท ขึ้นอยู่กับการพิจารณาใช้ส่วนต่างๆ ของเอลิเมนต์หลัก นั่นคือ แบบที่ 1 แบ่งโดยอาศัยการแบ่งเอลิเมนต์หลักของปัญหา (Cell-based Smoothed Finite Element Method) แบบที่ 2 แบ่งโดยอาศัยด้านแต่ละด้านของเอลิเมนต์หลัก (Edge-based Smoothed Finite Element Method) และแบบที่ 3 คือแบ่งโดยอาศัยโหนดของปัญหา (Node-based Smoothed Finite Element Method) รูปแบบของการแบ่งเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอดังกล่าว แสดงได้ดังรูปที่ 1 (ก), (ข) และ (ค) ตามลำดับ

ความแตกต่างระหว่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม และสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์อยู่ที่ไฟไนต์เอลิเมนต์ทำการสร้างสนามความเครียดแบบสอดคล้องในขณะที่ใช้การสร้างสนาม



รูปที่ 1 การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอแบบต่างๆ [2]

ความเครียดแบบสม่ำเสมอ โดยตรงด้วยรูปแบบ Weak Form สม่ำเสมอของกาเลอร์คิน (Smoothed Galerkin Weak Form) ในวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนที่เหลือต่อไปจากนี้ ได้แก่ การหาสติเฟนของระบบ การหาเวกเตอร์แรง และการแก้ระบบสมการสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งยังคงเป็นรูปแบบเดียวกันกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รวมทั้งวิธีการแบ่งส่วนย่อย (Discretization Methods) อื่นๆ จึงสามารถนำไปใช้ร่วมกันได้โดยไม่ต้องปรับเปลี่ยนขั้นตอนการคำนวณมากนัก

วิธีการวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาด้านต่างๆ เนื่องจากความแม่นยำในการหาค่าต่างๆ นั้นเอง โดย Liu และ Trung [3] พบว่า ค่าความเค้นที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ มีความแม่นยำสูงกว่าที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เดิม และคำตอบที่ได้นี้จะมีค่าอยู่ระหว่างค่าที่ได้จากทางทฤษฎีและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม [1] Hamrani และคณะ [4] รวมทั้ง Wang และคณะ [5] ได้ใช้วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแบ่งเอลิเมนต์หลัก ร่วมกับ NURBS-based IGA สำหรับปัญหาในระนาบสองมิติ โดยชี้ให้เห็นถึงข้อดีอีกประการหนึ่งของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เหนือกว่าวิธีอื่นคือ การไม่ต้องคำนวณหาค่าอนุพันธ์ลำดับต่างๆ ของฟังก์ชัน NURBS ซึ่งมักจะอยู่ในรูปของโพลีโนเมียลกำลังสูงๆ วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบอาศัยการแบ่งเอลิเมนต์หลักออกเป็นโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (CSFEM) นั้น ถือได้ว่าเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในขณะที่ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำในระดับความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ โดยถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางด้านการวิเคราะห์การสั่นสะเทือน [6] หรือร่วมกับวิธี Extended Finite Element Method (XFEM) สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความไม่

ต่อเนื่องและซิงกูลาริตี (Discontinuity and Singularity) ของปัญหาในสองและสามมิติ [7] ปัญหาที่เกี่ยวกับแผ่นและแผ่นบาง [8] เป็นต้น

การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยที่ไม่ถูกจำกัดอยู่แค่รูปทรงของเอลิเมนต์พื้นฐานหลักสองแบบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิมดังที่ได้กล่าวมาแล้วล่าสุดนั้น ได้แก่ วิธีเอลิเมนต์เสมือน (Virtual Element Method; VEM) [9], [10] วิธีสเกลลาร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ (Scaled Boundary Finite Element Method; SBFEM) [11], [12]

สำหรับสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น โดเมนสม่ำเสมอซึ่งถูกสร้างบนพื้นฐานของเอลิเมนต์ที่มีหลายด้าน (Polygonal Elements) นั้น ถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย Dai และคณะ [13] บ่อยครั้งพบว่า ปัญหาซิงกูลาริตี้มักจะเกิดขึ้นในระหว่างการวิเคราะห์หากจำนวนของโดเมนย่อยสม่ำเสมอที่ใช้ในแต่ละเอลิเมนต์หลักแบบหลายเหลี่ยมนี้มีจำนวนไม่เพียงพอ หากต้องการให้ผลลัพธ์ที่ได้มีเสถียรภาพ และความแม่นยำที่เพียงพอ Dai และคณะ ได้แนะนำให้มีการแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมให้มีจำนวนเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมนั้นๆ

งานวิจัยครั้งนี้ ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า เพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing Domains) ที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักซึ่งได้มาจากการแบ่งโดเมนของปัญหา (Discretization) ออกเป็นโครงตาข่ายย่อยรูปหลายเหลี่ยมตามวิธีของสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบที่ขึ้นอยู่กับเอลิเมนต์หลัก (Cell-based Smoothed Finite Element Method) โครงตาข่ายหลักรูปหลายเหลี่ยม หรือรูปทรงสี่หน้าซึ่งสามารถสร้างได้จากการใช้โปรแกรมที่เขียนขึ้นมา หรือโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปทั่วไป ตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ใช้เป็นคานายื่นปลายที่รับแรงเฉือนที่ปลายคานเป็นรูปพาราโบลาระทำที่ปลายอิสระ เพื่อหาค่าการโก่งตัวที่ได้เทียบกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีต่อไป

การศึกษาในครั้งนี้ได้แบ่งหัวข้อดำเนินการออกเป็นส่วนต่างๆ ดังต่อไปนี้ ทฤษฎีเบื้องต้นของการวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเทียบเท่า

จากเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าสำหรับโดเมนของปัญหา การแบ่งเอลิเมนต์สม่ำเสมออยู่รูปทรงสี่หน้าภายในเอลิเมนต์หลัก รวมทั้งขอบเขตของปัญหาความเค้นในระนาบสำหรับคานายื่นปลายจะถูกกล่าวถึงในส่วนที่สอง ตามด้วยส่วนที่สามซึ่งจะกล่าวถึงผลของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับปัญหาดังกล่าว และในส่วนที่สี่จะเป็นการอภิปรายผลและสรุปผลการวิเคราะห์

2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

การวิจัยเริ่มด้วยการกล่าวถึงสมการครอบคลุมปัญหาความเค้นในระนาบของของแข็งเป็นลำดับแรกก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีสมูทไฟไนต์สำหรับใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งดังกล่าว ตามด้วยการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเทียบเท่าครอบคลุมทั่วทั้งโดเมนของปัญหา ขั้นตอนของการสร้างเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอรูปทรงสี่หน้าสำหรับแต่ละเอลิเมนต์หลักทุกเอลิเมนต์ การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติที่เหมาะสม อันจะนำไปสู่ขั้นตอนของการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อนำค่าที่ได้เหล่านั้นไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีซึ่งจะได้กล่าวถึงเป็นหัวข้อสุดท้ายในส่วนนี้

2.1 สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนการสร้างสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการแก้ปัญหาคความเค้นของของแข็งในระนาบนั้น สามารถอธิบายโดยสรุปย่อ ดังนี้ เริ่มจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยรูปหลายเหลี่ยม (อาจหมายรวมถึงเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมสี่เหลี่ยมด้วย) เช่นเดียวกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม หรือใช้ขบวนการที่เรียกว่า Delaunay Triangulation ก็ได้ สร้างสนามการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง (Displacement Field) ทำการสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอโดยใช้ค่าของฟังก์ชันการประมาณภายในหรือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Functions) โดยอาศัยเทคนิคที่เรียกว่า Strain or Gradient Smoothing ตลอดทั้งโดเมนย่อยสม่ำเสมอที่ได้ทำการแบ่งไว้ภายในเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแล้ว สนามความเครียดสม่ำเสมอนี้ ถูกสร้างผ่านการอินทิเกรต



ของพื้นที่ขอบเขตนั้นเองโดยไม่ต้องทำการ Mapping ระหว่าง Physical และ Parent Coordinates โดยที่ขั้นตอนทั้งหมดต่อไปจากนี้ เหมือนกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม

สมการสมดุลสถิตสำหรับปัญหาเชิงยืดหยุ่น (Elastic Problem) ที่มีโดเมนของปัญหาเป็น Ω และขอบเขตเป็น Γ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

ร่วมกับสมการเงื่อนไขขอบ $\sigma_{ij}n_j = t_i$ บนขอบเขต Γ_t และ $u_i = \bar{u}_i$ บนขอบเขต Γ_u เมื่อ σ_{ij}, b_i และ n_i คือ เทนเซอร์ของความเค้น เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนัก และเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยตามลำดับ ดังนั้นสมการแปรผัน Weak Form จะสามารถเขียนได้ด้วยสมการ

$$\int_{\Omega} \delta V(u_{ij}) D_{ijkl} \nabla(u_{kl}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \quad (2)$$

สำหรับสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ ตัวปฏิบัติการสมำเสมอ (Smoothing Operator) จะใช้เทคนิค Strain/Gradient Smoothing กับโดเมนสมำเสมออยู่ภายในเอลิเมนต์หลักด้วยสมการ

$$\tilde{\nabla} u(x_s) = \frac{1}{A_s} \int_{\Omega_s} \nabla u(x) d\Omega \quad (3)$$

โดยที่ A_s คือพื้นที่ของโดเมนสมำเสมอและฟังก์ชันประมาณของการเปลี่ยนตำแหน่ง $u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i$ นั้นเอง นำค่าแทนลงในสมการที่ (3) จะทำให้การอินทิเกรตตลอดโดเมนสมำเสมออยู่นั้น เปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตบนขอบเขตของโดเมนสมำเสมออยู่นั้นๆ แทน ดังแสดงในสมการที่ (4)

$$\tilde{\nabla} u(x_s) = \frac{1}{A_s} \sum_{i=1}^n N_i(x) n(x) d\Gamma_i \quad (4)$$

อาศัยตัวปฏิบัติการสมำเสมอนี้ ค่าสนามความเครียดสมำเสมอก็สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันกับสนามความเครียดแบบสอดคล้อง โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แตกต่างกันตรงที่ค่าของเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-ระยะการเสียรูป (Strain-displacement Matrix) นั้นคือ

$$\tilde{B}_i = \frac{1}{A_s} \int_{\Omega_s} B_i(x) d\Omega \quad (5)$$

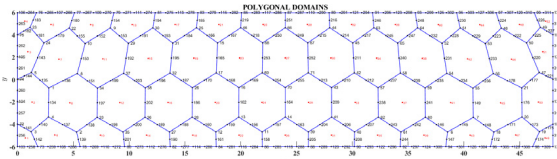
เมื่อ \tilde{B}_i และ B_i คือ เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-ระยะการเสียรูปของสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์ตามลำดับ กล่าวอีกอย่างหนึ่งว่าเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-ระยะการเสียรูป ของสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือค่าเฉลี่ยของเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-ระยะการเสียรูป ของไฟไนต์เอลิเมนต์ตลอดทั้งโดเมนสมำเสมออยู่นั้นเอง จากสมการที่ (5) จะได้ว่า

$$\tilde{B}_i(x_s) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{i1}(x_s) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{i2}(x_s) \\ \tilde{b}_{i2}(x_s) & \tilde{b}_{i1}(x_s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

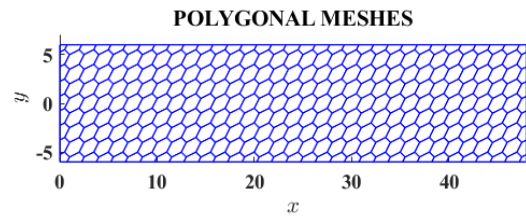
เอลิเมนต์หลักใดๆ ใน 2 มิติทุกประเภท ไม่ว่าจะเป็เอลิเมนต์สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม หรือหลายเหลี่ยมก็ตาม สามารถพิจารณาได้ว่าเกิดจากการนำเอาส่วนของเส้นตรงมาประกอบกันเข้าเป็นเอลิเมนต์นั้นๆ ขอบแต่ละด้านของเอลิเมนต์หลัก จึงถูกพิจารณาว่าเป็นเอลิเมนต์อย่างง่ายคือ เอลิเมนต์เส้นตรงที่มี 2 โหนด (2 Nodes Bar Element) เพราะฉะนั้น จึงใช้จุดของเกาส์ (Gauss Point) เพียงแค่จุดเดียว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของความยาวขอบนั้นๆ สำหรับการอินทิเกรตก็เพียงพอที่จะให้ค่าที่แท้จริงออกมาได้ ดังนั้น สมาชิกของเมทริกซ์ในสมการที่ (6) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมได้ดังสมการที่ (7)

$$\tilde{b}_{ik}(x_s) = \sum_{i=1}^n N_i(x_i^{GP}) n_{ik} L_i \quad (k=1,2) \quad (7)$$

จากสมการสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวข้างต้น ทำให้พบว่าไม่ต้องทำการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันรูปร่างรวมทั้งจาโคเบียนเมทริกซ์ ถือได้ว่าเป็นข้อดีประการหนึ่งที่ดีกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเดิม



รูปที่ 2 เอลิเมนต์หลักกรุปหลายเหลี่ยม



รูปที่ 3 เอลิเมนต์หลักกรุปหลายเหลี่ยมเทียบเท่า

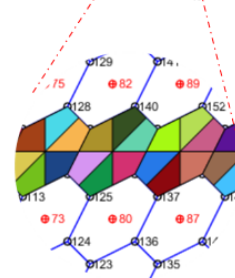
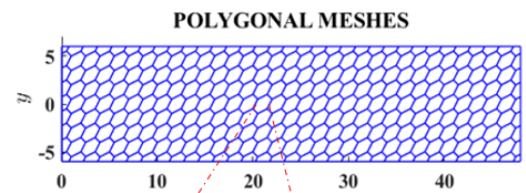
2.2 การสร้างเอลิเมนต์หลักและเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอรูปหลายเหลี่ยม

วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์อาศัยหลักการของการสร้างสนามความเครียดสมำเสมอที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ข้อดีประการหนึ่งของการทำเช่นนั้น ทำให้เอลิเมนต์หลัก หรือเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอเหล่านั้น เสมือนว่าเป็นเอลิเมนต์ขั้นพื้นฐานอย่างง่ายที่สุดนั่นคือ เอลิเมนต์เส้นตรงที่มีสองโหนด (2-node Line Element) มาประกอบกันเข้าเป็นเอลิเมนต์หลักดังกล่าว ส่งผลให้มีความยืดหยุ่นในการเลือกใช้งานเอลิเมนต์หลัก และเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอที่ประกอบด้วยจำนวนด้านที่มีมากกว่า 4 ด้าน ได้อย่างง่ายดาย

เทคนิคการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ในครั้งนี้ อาศัยโปรแกรมการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ถูกเขียนขึ้นมาด้วยโปรแกรม MATLAB ซึ่งใช้สำหรับการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับโดเมนปัญหาที่มาจากรูปทรงเรขาคณิตขั้นพื้นฐาน ได้แก่ เส้นตรง สี่เหลี่ยม วงกลม วงรี และมีรูปทรงไม่สลับซับซ้อนมากนัก [14] ตัวอย่างคานยื่นปลายที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม แสดงได้ดังรูปที่ 2

งานวิจัยครั้งนี้ เอลิเมนต์หลักกรุปหลายเหลี่ยมสำหรับโดเมนของปัญหานั้น ถูกสร้างขึ้นมาจากเอลิเมนต์หลักกรุปทรงสี่หน้า (Q4) ที่เทียบเท่ากันซึ่งสามารถสร้างได้จากการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปต่างๆ ไป จำนวนความละเอียดของโครงตาข่ายจากหยาบสุดไปจนกระทั่งละเอียดสุด กำหนดให้มีค่าเป็น 16×4 , 24×6 , 32×8 , 40×10 และ 48×12 ตามลำดับ รูปที่ 3 แสดงโครงตาข่ายหลักกรุปหลายเหลี่ยมเทียบเท่าที่ได้จากการแปลงเอลิเมนต์หลักกรุปทรงสี่หน้าที่โครงตาข่ายขนาด 32×8

เมื่อคานตัวอย่างได้ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์หลักกรุป

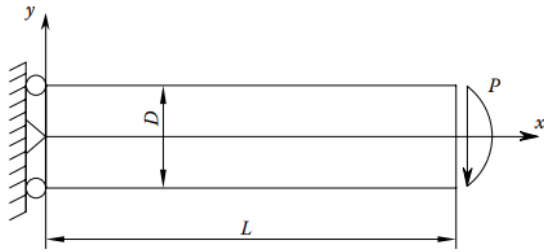


รูปที่ 4 เอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอรูปสี่หน้าภายในเอลิเมนต์หลักกรุปหลายเหลี่ยม

หลายเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 3 ข้างต้นแล้ว ขั้นตอนต่อไปเป็นการสร้างเอลิเมนต์ย่อยสมำเออรูปทรงสี่หน้าภายในแต่ละเอลิเมนต์หลัก เอลิเมนต์ย่อยสมำเออเหล่านี้ จะมีจุดยอดรวมกันที่ตำแหน่งเซนทรอยด์ (Barycenter) ของรูปหลายเหลี่ยมนั้นเอง การสร้างเอลิเมนต์ย่อยนี้ ทำได้ด้วยการเชื่อมโยงจุดเซนทรอยด์ของเอลิเมนต์หลักไปยังจุดกึ่งกลางด้านแต่ละด้านเพื่อสร้างรูปทรงสี่หน้าขึ้นมา จำนวนของเอลิเมนต์ย่อยสมำเออจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักกรุปหลายเหลี่ยมนั้นเอง ลักษณะของเอลิเมนต์ย่อยดังกล่าว แสดงได้ด้วยพื้นที่ในส่วนที่แรเงาเพื่อความชัดเจนดังแสดงในรูปที่ 4

2.3 ปัญหาสำหรับการทดสอบ

การวิจัยในครั้งนี้ พิจารณาใช้ตัวอย่างของคานยื่นปลาย



รูปที่ 5 คานยื่นปลายรับแรงเฉือนปลายคาน

(Cantilever Beam) ซึ่งมีฐานรองรับที่ปลายคานด้านซ้ายเป็นแบบยึดหมุน (Hinged Support) ที่ระยะกึ่งกลางของความลึก ($D/2$) โดยที่ขอบด้านบน และด้านล่างมีสภาพเป็นที่รองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้ง (Roller Support) เพื่อให้สามารถยึดหรือหัดได้อย่างอิสระสอดคล้องกับค่าของอัตราส่วนปัวซอง ในขณะที่ปลายคานด้านขวา รับแรงเฉือน 1000 นิวตัน ในแนวตั้ง โดยมีการกระจายตัวของแรงเป็นรูปพาราโบลา คานมีความยาวเท่ากับ 48 เมตร และมีความสูงเท่ากับ 12 เมตร โดยการพิจารณาว่าตัวอย่างของคานที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้เป็นปัญหาของความเค้นในระนาบสองมิติ ดังนั้น ความหนาของคานจึงมีกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 เมตร กำหนดให้ค่าคงที่ของวัสดุคือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ และอัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ 10^6 นิวตันต่อตารางเมตร และ 0.28 ตามลำดับ ลักษณะของคานยื่นปลายดังกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 5

ผลเฉลยจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของปัญหาคานยื่นปลายดังกล่าว ได้แก่ ค่าของการเคลื่อนที่ทั้งแนวตั้ง และแนวราบนั้น [15] สามารถแสดงในรูปสมการได้คือ

$$u_y = -\frac{P}{6EI} \left[3vy^2(L-x) + (4+5v)\frac{D^2x}{4} + 3x^2L - x^3 \right]$$

$$u_x = \frac{Py}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+v)(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right] \quad (8)$$

โดยค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของคาน $I = D^3/12$

ค่าของความเค้นซึ่งสามารถคำนวณได้เมื่อทราบค่าของการเคลื่อนที่แล้ว สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma_{xx}(x,y) = \frac{Py}{I}(L-x)$$

$$\sigma_{yy}(x,y) = 0$$

$$\sigma_{xy}(x,y) = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (9)$$

3. ผลการทดลอง

ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่จะนำไปใช้เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่วิเคราะห์ได้ทางทฤษฎี ได้แก่ ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (Tip Displacement) ค่าความคลาดเคลื่อนของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง (Vertical Displacement Error Norm) ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) และความเค้นเฉือน (Shear Stress) ของหน้าตัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางคาน ผลการศึกษาดังกล่าว มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่น่าสนใจของคานยื่นปลาย ตัวอย่างคือการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง ในที่นี้จะทำการเปรียบเทียบค่าดังกล่าวที่ทุกๆ ตำแหน่งของโหนดที่ขอบล่างของคานตลอดทั้งความยาว 48 เมตรของคานตัวอย่าง ค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีตามสมการที่ (9) ละเอียดถึงทศนิยมตำแหน่งที่ห้า มีค่าเท่ากับ 0.02665 เมตร ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง (U_{norm}) สามารถคำนวณได้ตามสมการที่ (10) คือ

$$U_{norm} = \frac{\|U_{exact} - U_{numerical}\|}{\|U_{exact}\|} \quad (10)$$

เมื่อ U_{exact} และ $U_{numerical}$ คือ เวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง ที่ได้จากทางทฤษฎีและจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) ตามลำดับ

ตารางที่ 1 แสดงค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคานสำหรับการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม (FEM-T3) และเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (FEM-Q4) ในแถวที่ 1 และ 2 ส่วนแถวที่ 3 เป็นค่าที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีเอลิเมนต์หลักเป็นรูปหลายเหลี่ยม

ณัฐยา เสียงใส และคณะ, “สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ใช้โดเมนสม่ำเสมอแบบเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติ.”

(nCSFEM-Q4) โดยมีเอลิเมนต์สม่ำเสมอเป็นเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า สำหรับเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎี ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.02665 เมตร

สำหรับโครงตาข่ายทุกขนาดที่ใช้ในงานครั้งนี้พบว่าค่าที่ได้จากการใช้วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น มีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยทางทฤษฎีมากกว่าการใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ T3 แต่อย่างน้อยก็เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Q4 ยกเว้นค่าที่ได้จากโครงตาข่ายที่มีความละเอียดมากที่สุดที่ 48×12 ซึ่งพบว่า ค่าที่ได้จากสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เข้าใกล้ค่าจากทางทฤษฎีมากที่สุด ความแตกต่างระหว่างค่าที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขกับค่าทางทฤษฎีสำหรับวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น มีแนวโน้มลดลงตามขนาดของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ

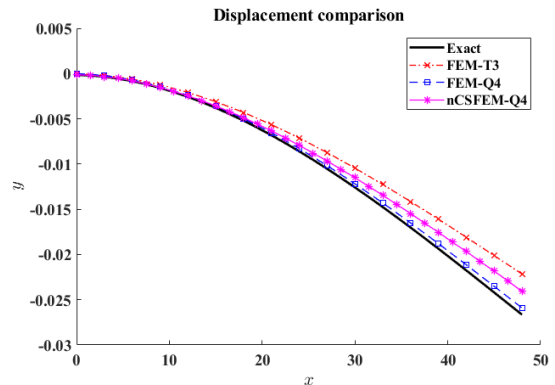
ตารางที่ 1 การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคาน ($y = -6$ เมตร) (เมตร)

Method	Vertical Tip Displacement (m)				
	Mesh				
	16 × 4	24 × 6	32 × 8	40 × 10	48 × 12
FEM-T3	0.02216	0.02443	0.02535	0.0258	0.02601
FEM-Q4	0.02590	0.02631	0.02646	0.02652	0.02660
nCSFEM	0.02408	0.02551	0.02612	0.02630	0.02663

ตารางที่ 2 ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคาน ($y = -6$ เมตร)

Method	Tip Vertical Displacement Error Norm				
	Mesh				
	16 × 4	24 × 6	32 × 8	40 × 10	48 × 12
FEM-T3	0.16848	0.08330	0.04878	0.03189	0.02402
FEM-Q4	0.02814	0.01276	0.00713	0.00488	0.00188
nCSFEM	0.09644	0.04278	0.01989	0.01313	0.00075

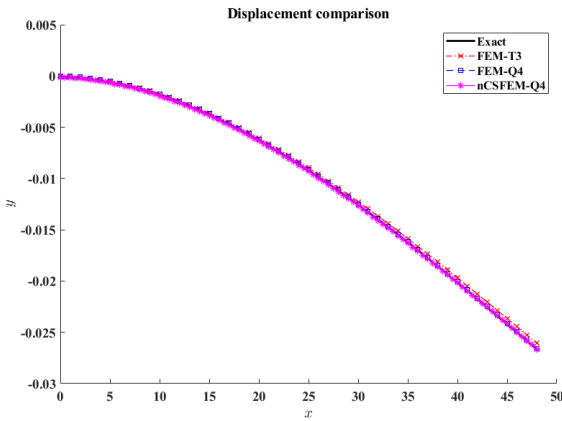
สำหรับตารางที่ 2 ซึ่งแสดงค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (10) ของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคานสำหรับโครงตาข่ายขนาดต่างๆ



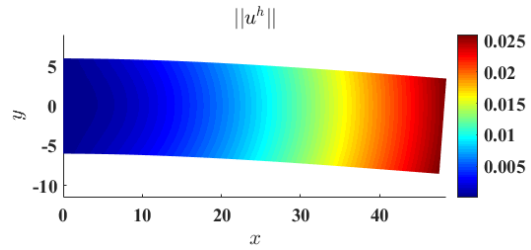
รูปที่ 6 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 16×4

กันนั้นพบว่า มีแนวโน้มเช่นเดียวกัน กล่าวคือ เมื่อขนาดของโครงตาข่ายมีความละเอียดมากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานก็มีค่าลดลงตามไปด้วย โดยค่าที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (0.00075) มีค่าดีกว่าค่าที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Q4 (0.00188) ที่ความละเอียดของโครงตาข่ายขนาด 48×12

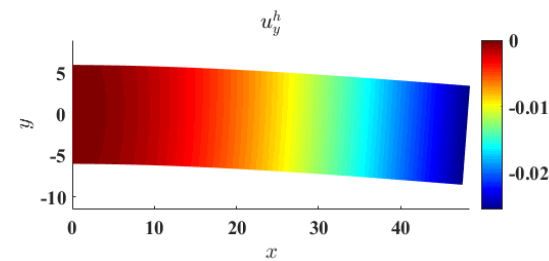
สำหรับรูปที่ 6 นั้น แสดงค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งของทั้งสามวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเมื่อเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎีสำหรับความละเอียดโครงตาข่ายต่ำสุดที่ 16×4 พบว่า ค่าที่ได้จากทั้งสามวิธีนั้น ให้ค่าความแม่นยำที่ใกล้เคียงกัน โดยค่าที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (nCSFEM-Q4) นั้น มีค่าอยู่ระหว่างสองวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ เมื่อความละเอียดของโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจนกระทั่งสูงสุดที่ 48×12 ดังแสดงในรูปที่ 7 นั้น พบว่า วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (nCSFEM-Q4) มีความแม่นยำในการคำนวณเท่ากับ หรือ ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Q4 นั้นเอง ในขณะที่ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ T3 (FEM-T3) นั้นพบว่า มีความแม่นยำน้อยกว่าทั้งสองวิธีสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบของคานยื่นปลายในครั้งนี้ ดังนั้น สำหรับการวิเคราะห์ผลที่ได้ต่อไปจากนี้จะเป็นการเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบการใช้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (nCSFEM-Q4) กับผลที่ได้จากทางทฤษฎีโดยตรงเพียงอย่างเดียว



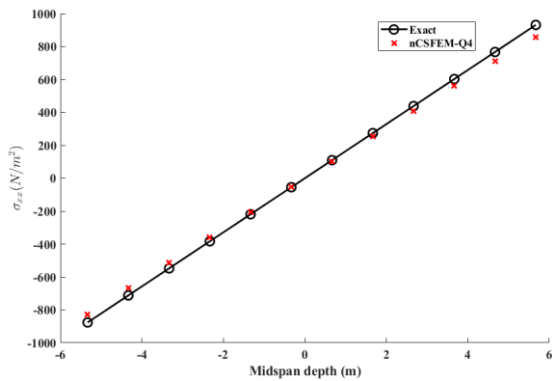
รูปที่ 7 ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคาน ที่โครงตาข่าย 48×12



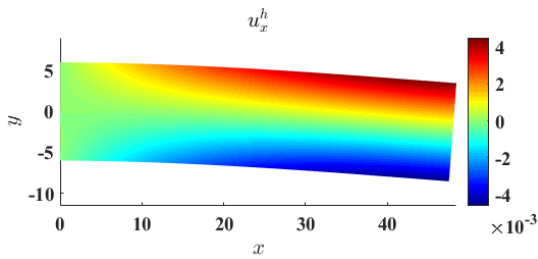
รูปที่ 10 ค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเคลื่อนที่



รูปที่ 8 การเคลื่อนที่ในแนวตั้ง



รูปที่ 11 ความเค้นตั้งฉาก ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน

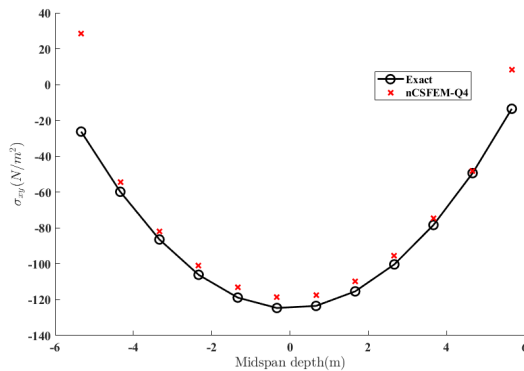


รูปที่ 9 การเคลื่อนที่ในแนวราบ

รูปที่ 8-10 แสดงผลการกระจายตัวของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง ในแนวราบ และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่ง ตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหาซึ่งได้จากวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมในรูปแบบของ Contour ที่ความละเอียดโครงตาข่ายขนาด 48×12

3.2 ความเค้นตั้งฉาก

สำหรับกรณีศึกษาี้ จะใช้ความเค้นตั้งฉากที่ได้จากการวิเคราะห์บริเวณหน้าตัดกึ่งกลางคานตลอดความลึกของคานที่ขนาดโครงตาข่าย 48×12 เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทางทฤษฎี ณ ตำแหน่งเดียวกัน ค่าเหล่านั้น ถูกนำมาแสดงในรูปที่ 11 โดยแกนในแนวตั้งเป็นค่าความเค้นตั้งฉากส่วนแกนในแนวนอนเป็นค่าความลึกของหน้าตัดคาน พบว่า ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีที่นำเสนอ มีความสอดคล้องกับค่าที่ได้จากทางทฤษฎีเป็นอย่างดี จะสังเกตเห็นว่า บริเวณโหนดที่อยู่ถัดเข้ามาจากขอบบนและขอบล่างของหน้าตัดคานนั้น ค่าที่ได้โดยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมนี้ มีความแตกต่างจากค่าทางทฤษฎีอยู่บ้าง ซึ่งความแตกต่างดังกล่าวจะมีค่ามากที่สุด ณ ตำแหน่งของโหนดที่อยู่บริเวณขอบบนและขอบล่างของคาน ($y = \pm 6$) และให้ผลในลักษณะเดียวกันกับการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ปกติ เนื่องมาจากพื้นที่ซึ่งส่งผลต่อการคำนวณหาค่าความเค้น ณ ตำแหน่งดังกล่าว



รูปที่ 12 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน

มีเพียงทิศทางเดียวเมื่อเทียบกับโหนดในบริเวณอื่นๆ ซึ่งได้รับอิทธิพลของพื้นที่จากโหนดที่อยู่ข้างเคียงมากกว่านั้นเอง ดังนั้น จึงไม่ได้รวมผลดังกล่าวไว้ในรูปที่ (11)

3.3 ความเค้นเฉือน

ความเค้นเฉือนสำหรับใช้ในการเปรียบเทียบนี้ พิจารณาที่บริเวณหน้าตัดเดียวกันกับค่าของความเค้นตั้งฉากในหัวข้อที่แล้ว ลักษณะของความเค้นเฉือนที่ได้จากการวิเคราะห์ มีแนวโน้มเดียวกันกับค่าความเค้นตั้งฉาก กล่าวคือ มีความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ในระดับดีมากเมื่อเทียบกับผลของการคำนวณทางทฤษฎีดังแสดงในรูปที่ 12 เช่นเดียวกันกับกรณีของความเค้นปกติในหัวข้อที่ผ่านมา ค่าดังกล่าวมีความเบี่ยงเบนจากค่าทางทฤษฎีสูงที่โหนดบริเวณขอบทั้งสองด้านของปัญหาเนื่องด้วยเหตุผลเดียวกับที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้ว และไม่ได้รวมเอาผลดังกล่าวไว้ในรูปที่ (12) เช่นเดียวกัน

4. อภิปรายผลและสรุป

การวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมด้วยการแบ่งเอลิเมนต์หลักเหล่านั้นออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมย่อยรูปทรงสี่หน้า (nCSFEM-Q4) สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบของคานยื่นปลายที่รับแรงเฉือนรูปพาราโบลากระทำที่ปลายอิสระนี้ ได้แสดงให้เห็นถึงความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้เมื่อเทียบกับทั้งผลเฉลยทางทฤษฎี หรือผลจากวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างวิธี

ไฟไนต์เอลิเมนต์แล้วว่า ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญถึงทศนิยมตำแหน่งที่ห้า ทั้งในส่วนของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งรวมทั้งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนตามลำดับ แนวโน้มของความแม่นยำที่ได้ มีลักษณะเช่นเดียวกันกับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ กล่าวคือ มีค่าเพิ่มขึ้นตามจำนวนของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้น ในกรณีนี้ ที่ความละเอียดของโครงตาข่ายสูงสุด ความแม่นยำผลลัพธ์ของวิธีที่นำเสนอ มีค่ามากกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ T3 และอยู่ในระดับเดียวกับไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Q4 นอกจากนั้น ทั้งค่าของความเค้นปกติและความเค้นเฉือน ณ ตำแหน่งของโหนดบริเวณขอบบนและขอบล่างที่ได้นั้น มีความคลาดเคลื่อนกับค่าที่ได้ทางทฤษฎีอยู่บ้าง จึงตั้งเป็นข้อสังเกตสำหรับงานวิจัยต่อไปได้ว่า ควรเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์หลักให้มากขึ้นในบริเวณขอบของปัญหาที่กำลังพิจารณาเพื่อลดความผิดพลาดของการคำนวณความเค้นในบริเวณดังกล่าว

ถึงแม้ว่าความแม่นยำของการคำนวณดังกล่าว ไม่ได้มากไปกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Q4 ซึ่งถือได้ว่าเป็นวิธีที่ได้ได้รับความนิยมอย่างมากสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบปกติ อย่างมีนัยสำคัญก็ตาม แต่สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบแบบอื่นๆ เช่น ปัญหาความเค้นในระนาบของแผ่นที่มีรูเจาะ ปัญหาความเค้นในระนาบของแผ่นที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เช่น แผ่นรูปตัวแอล เป็นต้น หรือปัญหาความเค้นในระนาบของคานแบบเซลลูลาร์ (Castellated Beam) ซึ่งมีสภาพของความเค้นขมขม (Stress Concentration) ในบางตำแหน่งรวมทั้งปัญหาของการแตกหัก (Fracture Mechanics) ซึ่งเกิด Stress Singularity ที่ปลายรอยแตก ปัญหาประเภทนี้ ต้องใช้การแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กเพียงพอที่จะสามารถทำนายพฤติกรรมที่ถูกต้องได้อย่างแม่นยำหรือใช้วิธีอื่นๆ เช่น XFEM (Extended Finite Element Method) เข้ามาช่วยในการวิเคราะห์ การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่มีขนาดเล็ก ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รอบๆ บริเวณดังกล่าว ในขณะที่บริเวณอื่นๆ ซึ่งไม่ได้รับผลกระทบนั้น ยังคงใช้โครงตาข่ายแบบทรงเหลี่ยมสี่หน้าตามปกติ ดูเหมือนจะเป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับการวิเคราะห์ที่ได้เป็นอย่างดี ประโยชน์อีกอย่างหนึ่งของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์



แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนี้คือ การวิเคราะห์ปัญหาที่มีหลายโดเมน (Multiple Domains) ซึ่งแต่ละโดเมนอาจจะมีสมบัติทางรูปทรงเรขาคณิต และสมบัติทางกลที่ไม่เหมือนกัน หากโดเมนเหล่านั้น มีการสร้างโครงตาข่ายที่มีรูปร่างแตกต่างกัน อาจนำไปสู่ความไม่เข้ากันของโครงตาข่ายที่บริเวณรอยต่อ (Non-matching Mesh) ระหว่างโดเมนเหล่านั้น เนื่องจากเอลิเมนต์หลักของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ ไม่ต้องการ Mapping ไปยัง Parent Element จึงสามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวได้อย่างไม่มีข้อจำกัดและเป็นหัวข้อวิจัยที่น่าสนใจอย่างยิ่ง

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้เขียนขอขอบคุณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี สำหรับการสนับสนุนเวลาในการทำงานวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] G. Liu, K. Dai, and T. Nguyen, "A smoothed finite element method for mechanics problems" *Computational Mechanics*, vol. 39, no. 6, pp. 859–877, 2007.
- [2] W. Junchum, K. Musiket, B. Puangpaingam, and S. Pongsivasatit, "Two-dimensional plane stress analysis by smoothed finite element method using 4 smoothing cells created by an arbitrary quadrilateral element," *Engineering Journal of Research and Development*, vol. 32, no. 3, 2021 (in Thai).
- [3] G. R. Liu and N. Trung, *Smoothed Finite Element Methods*, Boca Raton, FL: CRC Press, 2010, ch. 4, sec. 4.1-4., pp. 84–132.
- [4] A. Hamrani, S. H. Habib, and I. Belaidi, "CS-IGA: A new cell based smoothed isogeometric analysis for 2D computational mechanics problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 315, pp. 671–690, 2017.
- [5] D. Wang, H. Zhang, and J. Xuan, "A strain smoothing formulation for NURBS-based isogeometric finite element analysis," *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, vol. 55, no. 1, pp. 132–140, 2012.
- [6] K. Dai and G. R. Liu, "Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SCFEM)," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 301, no. 3-5, pp. 803–820, 2007.
- [7] S. P. Bordas, T. Rabczuk, N. X. Hung, V. P. Nguyen, S. Natarajan, T. Bog, and N. V. Hiep, "Strain smoothing in FEM and XFEM," *Computers & Structures*, vol. 88, no. 23–24, pp. 1419–1443, 2010.
- [8] H. Nguyen-Xuan and T. Nguyen-Thoi, "A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin–Reissner plates," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 25, no. 8, pp. 882–906, 2009.
- [9] F. Aldakheel, B. Hudobivnik, A. Hussein, and P. Wriggers, "Phase-field modeling of brittle fracture using an efficient virtual element scheme," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 341, pp. 443–466, 2018.
- [10] A. Hussein, F. Aldakheel, B. Hudobivnik, P. Wriggers, P. A. Guidault, and O. Allix, "A computational framework for brittle crack-propagation based on efficient virtual element method," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 159, pp. 15–32, 2019.
- [11] C. Song and J. P. Wolf, "The scaled boundary finite-element method alias consistent infinitesimal finite-element cell method for



- elastodynamics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 147, no. 3–4, pp. 329–355, 1997.
- [12] H. Guo, E. T. Ooi, A. A. Saputra, Z. Yang, S. Natarajan, E. H. Ooi, and C. Song, “A quadtree-polygon-based scaled boundary finite element method for image-based mesoscale fracture modelling in concrete,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 211, no. 15, pp. 420–441, 2019.
- [13] K. Y. Dai, G. R. Liu, and T. T. Nguyen, “An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, no. 11–12, pp. 847–860, 2007.
- [14] E. T. Ooi, C. Song, F. Tin-Loi, and Z. J. Yang, “Automatic modelling of cohesive crack propagation in concrete using polygon scaled boundary finite elements,” *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 93, pp. 13–33, 2012.
- [15] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elasticity*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1970.