บทความวิจัย

การวิเคราะห์การเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์

วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา* เสริมศักดิ์ ติยะแสงทอง และ คมกร ไชยเดชาธร
สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
สุกัญญา เชยโพธิ์ และ กรกต เลิศชัยพงศ์
สาขาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน
สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม
ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 09 1779 0935 อีเมล: weeraphan.ji@rmuti.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2024.08.010
รับเมื่อ 16 มีนาคม 2566 แก้ไขเมื่อ 10 พฤษภาคม 2566 ตอบรับเมื่อ 25 พฤษภาคม 2566 เผยแพร่ออนไลน์ 19 สิงหาคม 2567

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์การเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์ การสร้างแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณหารูปแบบพื้นฐานของพื้นผิวอันดับที่หนึ่งและสอง ฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนสามารถเขียนได้โดยใช้สมการแปรผันและจัดในรูปแบบที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณแบบไม่เป็นเชิงเส้น ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของค่าการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนสามารถคำนวณได้ โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นสำหรับชิ้นส่วนคานแบบโพลิโนเมียลอันดับห้าโดยทำการแบ่งเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ในระบบพิกัดเชิงขั้วแบบทรงกลมร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ เนื่องจากความแตกต่างของค่าความโค้งหลักของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จึงใช้เทคนิคตัวคูณแบบลากรองจ์ในการป้องกันปัญหาความไม่ต่อเนื่องที่เกิดขึ้น ผลการศึกษาพบว่า ค่าการเสียรูปที่ได้จากงานวิจัยในครั้งนี้มีความถูกต้อง เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่แสดงค่าการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนภายใต้การแปรเปลี่ยนแรงดันภายใน อัตราส่วนความยาวรัศมี มุมรองรับส่วนโค้ง และความหนาของโครงสร้างเปลือกบางได้ถูกนำเสนอในบทความนี้ ผลการศึกษาพบว่า ค่าการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วที่ตำแหน่งจุดเชื่อมต่อของโครงสร้าง แบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับงานโครงสร้างเปลือกบางประเภทอื่น ๆ ที่มีรูปแบบซับซ้อน และสามารถคำนวณหาอัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดได้

คำสำคัญ: การวิเคราะห์การเสียรูปมาก โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน เทคนิคตัวคูณลากรองจ์ รูปแบบพื้นฐานของพื้นผิว วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น

การอ้างอิงบทความ: วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา, เสริมศักดิ์ ติยะแสงทอง, คมกร ไชยเดชาธร, สุกัญญา เชยโพธิ์, กรกต เลิศชัยพงศ์ และ สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม, “การวิเคราะห์การเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์,” *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 35, ฉบับที่ 1, หน้า 1–19, เลขที่บทความ 251-056837, ม.ค.–มี.ค. 2568.

Research Article

Large Displacement Analysis of Internally Pressurized Multi-segmented Spherical Shells with Lagrange's Multiplier Technique

Weeraphan Jiammeepreecha*, Sermsak Tiyasangthong and Komkorn Chaidachatorn
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima, Thailand
Sukanya Choeipo and Korakot Lerdchaipong
Department of Survey Engineering, Faculty of Engineering and Technology, Rajamangala University of Technology Isan Nakhon Ratchasima, Thailand
Sittisak Jamnam
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 09 1779 0935, E–mail: weeraphan.ji@rmuti.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2024.08.010
Received 16 March 2022; Revised 10 May 2023; Accepted 25 May 2023; Published online: 19 August 2024

Abstract

This paper presents a large displacement analysis of internally pressurized multi-segmented spherical shells with Lagrange's multiplier technique. Multi-segmented spherical shells are modeled using differential geometry to compute the first and second surface fundamental forms. The energy functional of multi-segmented spherical shells can be derived from the variational formulation, and it is written in the appropriate forms for nonlinear analysis. The numerical results in terms of large displacement of the multi-segmented spherical shells can be obtained by nonlinear finite element method via the fifth-order polynomial shape function described in spherical polar coordinates, and are solved by the iterative procedure. Since the multi-segmented spherical shells have two different radii of curvatures, the Lagrange's multiplier technique is required in the present formulation to handle the discontinuity effect. The numerical results indicate that the deformed configuration of the present formulation is accurate when compared to those from the commercial finite element software. The effects of the internal pressure, radius ratio, support angle, and thickness on the large displacement responses of the multi-segmented spherical shells are presented in this paper. Finally, the results indicate that all displacement responses of the internally pressurized multi-segmented spherical shells change rapidly near the shell edge junctions. The analytical models obtained in this study can be applied to other shell structures with complex patterns. Additionally the most efficient structure's surface-area-to-volume ratio can be defined.

Keywords: Large Displacement Analysis, Multi-segmented Spherical Shells, Lagrange's Multiplier Technique, Surface Fundamental Forms, Nonlinear Finite Element Methods

Please cite this article as: W. Jiammeepreecha, S. Tiyasangthong, K. Chaidachatorn, S. Choeipo, K. Lerdchaipong, and S. Jamnam, "Large displacement analysis of internally pressurized multi-segmented spherical shells with lagrange's multiplier technique," *The Journal of KMUTNB*, vol. 35, no. 1, pp. 1–19, ID. 251-056837, Jan.–Mar. 2025 (in Thai).

1. บทนำ

โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงมาตรฐานในงานวิศวกรรมโยธา วิศวกรรมเครื่องกล และวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเล เป็นต้น เช่น โครงสร้างโดม ถังรับแรงดัน และถังบรรจุของเหลว และโครงสร้างประเภทอื่น ๆ โดยจะสามารถวิเคราะห์เป็นปัญหาแบบสมมาตรรอบแกนหมุน (Shell of Revolution) ได้ ซึ่งสามารถพบได้ในงานวิจัยของ Blachut [1] Hamed และคณะ [2] วีรพันธุ์ และคณะ [3], [4], [5] Zingoni [6] วีรพันธุ์ และ สมชาย [7] วีรพันธุ์ [8], [9] คมกร และคณะ [10] และ Evkin และ Lykhachova [11] เป็นต้น โครงสร้างเปลือกบางเหล่านี้โดยปกติจะรับแรงกระทำแบบสมมาตร (Symmetrical Loadings) เช่น แรงดันแบบสม่ำเสมอ แรงดันน้ำสถิต หรือ แรงแบบวงแหวน (Ring Load) เป็นต้น

การประยุกต์ใช้งานโครงสร้างเปลือกบาง ไม่ได้ถูกจำกัดเฉพาะโครงสร้างเปลือกบางที่มีรูปทรงหน้าตัดมาตรฐานเท่านั้น ยกตัวอย่าง เช่น งานวิจัยของ Zingoni [12], [13] ได้นำเสนอสมการวิเคราะห์สำหรับผลของเมมเบรนที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางหน้าตัดรูปทรงไข่ ที่ประกอบด้วยสามชิ้นส่วนย่อย เพื่อใช้งานเป็นถังย่อยสลัดจ์ (Sludge-Digestion Tanks) Hong และ Teng [14] ได้นำเสนอสมการกึ่งวิเคราะห์ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อศึกษาผลความไม่สมบูรณ์ของโครงสร้างเปลือกบางหน้าตัดทรงกรวย-ทรงกระบอกรับแรงดันภายใน Jasion และ Magnucki [15] ได้นำเสนอสมการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงผสมระหว่าง Clothoidal-spherical เพื่อหาค่าผลการเสียรูปที่สภาวะก่อนเกิดการโก่งเดาะ เกิดการโก่งเดาะ และหลังการโก่งเดาะ Zingoni และ Enoma [16] ได้ทำการศึกษาสมการวิเคราะห์สำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกรวย-ทรงกลมและรูปทรงพาราโบลา-ทรงกลม รับแรงดันน้ำสถิตโดยสมมติให้แรงดันมีค่าคงที่ตลอดความสูงของโครงสร้างเปลือกบาง

จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่า โครงสร้างดังกล่าวได้ทำการศึกษาเฉพาะผลของการเสียรูปขนาดเล็ก เนื่องจากเป็นข้อจำกัดของสมการสำหรับการวิเคราะห์ในขณะที่น้ำหนักบรรทุกหรือแรงดันที่กระทำต่อโครงสร้างเปลือกบางมีขนาดใหญ่ ดังนั้น การศึกษาเฉพาะผลของการเสียรูปขนาดเล็กจึงอาจจะให้คำตอบที่ไม่ครอบคลุมปัญหาที่เกิดขึ้น การวิเคราะห์เพื่อหาคำตอบแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยพิจารณาผลของค่าการเสียรูปมาก จึงมีความสำคัญอย่างมากสำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่ใช้ในงานวิศวกรรมดังกล่าว

สำหรับวัตถุประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้ คือ เพื่อนำเสนอถึงผลตอบสนองของค่าการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์ โดยที่ข้อดีของโครงสร้างประเภทนี้จะมีประสิทธิภาพในการบรรจุของเหลวได้สูงกว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมมาตรฐาน เมื่อพิจารณาค่าอัตราส่วนของพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างเปลือกบาง และได้มีการอภิปรายผลเพิ่มเติมในบทความนี้ สำหรับข้อดีของการใช้แบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางที่แบ่งเป็นแบบหลายชิ้นส่วนจะสามารถทำให้เราประยุกต์ใช้งานได้กับโครงสร้างเปลือกบางมีรูปทรงที่แตกต่างกัน ไม่สามารถนิยามได้โดยใช้เรขาคณิตหรือเวคเตอร์ระบุตำแหน่งเพียงฟังก์ชันเดียว [12]–[16]

สำหรับการศึกษาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์ในครั้งนี้จะรวมผลของค่าการเสียรูปและการหมุนที่มีขนาดใหญ่ (Large Displacement and Rotation) เข้าไปในระบบสมการ การสร้างแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางจะใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณหารูปแบบพื้นฐานของพื้นผิวอันดับที่หนึ่งและสอง [17], [18] ฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนจะสามารถเขียนได้โดยใช้สมการแปรผันและจัดในรูปแบบที่เหมาะสมสำหรับการคำนวณแบบไม่เป็นเชิงเส้น [19], [20] การเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนภายใต้แรงดันสม่ำเสมอสามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการของงานเสมือน [21] จากนั้นใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น [22] ร่วมกับ เทคนิคตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange's Multiplier Technique) เพื่อความต่อเนื่องของจุดต่อระหว่างผิวโค้งทรงกลมที่มาประกอบกัน โดยในงานวิจัยนี้ จะเลือกใช้ชิ้นส่วนคานแบบแบบโพลิโนเมียลอันดับที่ห้า [23] และทำการแบ่งเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ในระบบ

พิกัดเชิงขั้วแบบทรงกลม สำหรับระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแก้ได้โดยใช้วิธีกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Procedure) โดยที่ค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนเมื่อรับแรงดันภายในเป็นสิ่งที่ต้องคำนวณหา

2. วัสดุ อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

วิธีการวิจัยในบทความนี้จะประกอบไปด้วยสมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ แบบจำลองโครงสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับการเสียรูป พลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนและโมเมนต์ดัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน งานเสมือนเนื่องจากแรงดันภายใน ผลรวมของงานเสมือน และสุดท้ายเป็นการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าการเสียรูปโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังต่อไปนี้

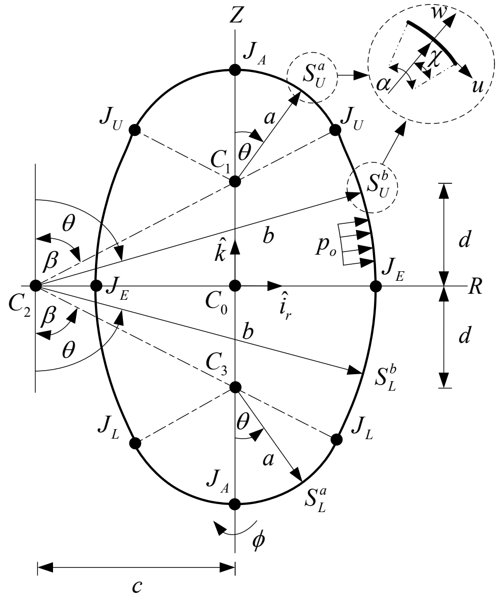
2.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

2.1.1 วัสดุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนมีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linearly Elastic Material) โดยที่พลังงานความเครียดถูกเขียนในรูปของ ฟังก์ชันกำลังสองของค่าความเครียดลากรองจ์ (Lagrangian Strain)

2.1.2 ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูป

2.1.3 ผลของน้ำหนักของโครงสร้างที่มีต่อค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงดันภายในที่กระทำต่อโครงสร้างจึงไม่นำมาพิจารณา

2.1.4 แรงลัพธ์ในแนวดิ่งและแนวราบที่เกิดขึ้นกับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน เนื่องจากแรงดันภายในมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขของจุดรองรับในทางทฤษฎี ยกเว้นในกรณีที่พิจารณาผลของน้ำหนักโครงสร้างและน้ำหนักของเหลวที่บรรจุภายในซึ่งในทางปฏิบัติโครงสร้างดังกล่าว อาจวางอยู่บนชั้นดินแข็ง (Soil Foundation) หรือฐานรากขนาดใหญ่ (Mat Footing) ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าว ยังไม่ได้นำมาพิจารณาในบทความนี้และจะทำการศึกษาเชิงลึกต่อไปในอนาคต



รูปที่ 1 รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน

2.2 แบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน

รูปที่ 1 แสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับการวิเคราะห์การเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน โดยที่โครงสร้างประกอบด้วย 2 ส่วน เมื่อพิจารณาจากแนวรัศมี R คือ ส่วนบนและส่วนล่าง สำหรับโครงสร้างส่วนบนเหนือแนวรัศมี R จะประกอบไปด้วย 2 ส่วนย่อย คือ ส่วนย่อยที่มีความยาวรัศมี a เชื่อมต่อส่วนย่อยที่มีความยาวรัศมี b ดังนั้นกำหนดให้โครงสร้างเปลือกบางส่วนบนที่มีความยาวรัศมี a และ b เป็นพื้นผิว S_U^a และ S_U^b ตามลำดับ ในขณะที่โครงสร้างเปลือกบางส่วนล่างใต้แนวรัศมี R จะกำหนดให้เป็นพื้นผิว S_L^a และ S_L^b ตามลำดับ

สำหรับการกำหนดจุดเชื่อมต่อของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน จะเริ่มต้นจากการกำหนด

ให้ J_U เป็นจุดเชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S_U^a และ S_L^a ในขณะที่จุดเชื่อมต่อ J_L เป็นจุดเชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S_L^a และ S_L^b ส่วนจุดต่อ J_A และ J_E เป็นจุดเชื่อมต่อที่ตำแหน่งปลายยอด (Apex) และระนาบอิเควเตอร์ (Equatorial Plane) ตามลำดับ ดังนั้นพบว่า พื้นผิว S_U^a และ S_L^a จะมีจุดศูนย์กลางความโค้งอยู่ที่จุด C_1 และ C_3 บนแกนหมุน ตามลำดับ ในขณะที่พื้นผิว S_U^b และ S_L^b จะมีจุดศูนย์กลางความโค้งอยู่ที่จุด C_2 บนแกนระนาบอิเควเตอร์วัดออกมาจากแกนหมุน เป็นระยะทาง c เมื่อวัดตามแนวรัศมี R ในขณะที่ระยะจากแกนระนาบอิเควเตอร์ถึงจุดศูนย์กลางความโค้ง C_1 และ C_3 จะมีค่าเท่ากับระยะทาง d เมื่อวัดตามแนวแกนหมุน Z ถ้ากำหนดระยะพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนเป็นค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิว θ และ ϕ ดังนั้น ที่จุดเชื่อมต่อของโครงสร้างเปลือกบาง J_U และ J_L จะอยู่ที่พิกัด $\theta = \beta$

2.3 รูปแบบพื้นฐานของพื้นผิวสำหรับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน

สำหรับโครงสร้างเปลือกบางส่วนบนและส่วนล่างของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน สามารถเขียนเวคเตอร์ระบุตำแหน่งของพื้นผิว S_U^a และ S_L^a ได้ดังสมการที่ (1)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^a &= a\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + a\sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + \left[(b-a)\cos\beta + a\cos\theta\right]\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{1}$$

จากหลักการของรูปแบบพื้นฐานของพื้นผิว [17] จะสามารถคำนวณหาค่าองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ (Metric Tensor Components) ได้ดังสมการที่ (2)–(4)

$$E^a = \mathbf{R}_\theta^a \cdot \mathbf{R}_\theta^a = a^2 \tag{2}$$

$$F^a = \mathbf{R}_\theta^a \cdot \mathbf{R}_\phi^a = 0 \tag{3}$$

$$G^a = \mathbf{R}_\phi^a \cdot \mathbf{R}_\phi^a = a^2\sin^2\theta \tag{4}$$

โดยที่ตัวห้อย (θ, ϕ) คือ อนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบางในที่นี้ คือ $\mathbf{R}_\theta^a = \partial\mathbf{R}^a / \partial\theta$ และ $\mathbf{R}_\phi^a = \partial\mathbf{R}^a / \partial\phi$ ถ้ากำหนดให้ค่าเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย (Unit Normal Vector) กับพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางที่ศูนย์กลางความหนา (Middle Surface) มีค่าดังสมการที่ (5)

$$\hat{\mathbf{n}}^a = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \tag{5}$$

ดังนั้น ค่าองค์ประกอบเทนเซอร์ความโค้ง (Curvature Tensor Components) ของพื้นผิว S_U^a และ S_L^a จะมีค่าดังสมการที่ (6)–(8)

$$L^a = \mathbf{R}_{\theta\theta}^a \cdot \hat{\mathbf{n}}^a = -a \tag{6}$$

$$M^a = \mathbf{R}_{\theta\phi}^a \cdot \hat{\mathbf{n}}^a = 0 \tag{7}$$

$$N^a = \mathbf{R}_{\phi\phi}^a \cdot \hat{\mathbf{n}}^a = -a\sin^2\theta \tag{8}$$

จากสมการที่ (6) และ (8) สามารถหาค่าความโค้งหลัก (Principal Curvature) ของพื้นผิว S_U^a และ S_L^a ได้ดังสมการที่ (9) – (10)

$$\kappa_1^a = \frac{L^a}{E^a} = -\frac{1}{a} \tag{9}$$

$$\kappa_2^a = \frac{N^a}{G^a} = -\frac{1}{a} \tag{10}$$

สำหรับโครงสร้างเปลือกบางส่วนกลางจะเป็นส่วนที่เชื่อมต่อระหว่างส่วนบนและส่วนล่างของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนเข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 1 ดังนั้น ค่าเวคเตอร์ระบุตำแหน่งที่จุดต่าง ๆ บนพื้นผิว S_U^b และ S_L^b จะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (11)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^b &= (\mathrm{b}\sin\theta - c)\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + (\mathrm{b}\sin\theta - c)\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + b\cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{11}$$

ในที่นี้สามารถคำนวณหาค่าองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ได้ดังสมการที่ (12) – (14)

$$E^b = \mathbf{R}_\theta^b \cdot \mathbf{R}_\theta^b = b^2 \quad (12)$$

$$F^b = \mathbf{R}_\theta^b \cdot \mathbf{R}_\phi^b = 0 \quad (13)$$

$$G^b = \mathbf{R}_\phi^b \cdot \mathbf{R}_\phi^b = (b\sin\theta - c)^2 \quad (14)$$

ค่าเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยกับพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางที่ศูนย์กลางความหนามีค่าดังสมการที่ (15)

$$\hat{\mathbf{n}}^b = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \quad (15)$$

และค่าองค์ประกอบเทนเซอร์ความโค้งของพื้นผิว S_U^b และ S_L^b จะมีค่าดังสมการที่ (16)–(18)

$$L^b = \mathbf{R}_{\theta\theta}^b \cdot \hat{\mathbf{n}}^b = -b \quad (16)$$

$$M^b = \mathbf{R}_{\theta\phi}^b \cdot \hat{\mathbf{n}}^b = 0 \quad (17)$$

$$N^b = \mathbf{R}_{\phi\phi}^b \cdot \hat{\mathbf{n}}^b = -(b\sin\theta - c)\sin\theta \quad (18)$$

จากสมการที่ (16) และ (18) จะสามารถหาค่าความโค้งหลักของพื้นผิว S_U^b และ S_L^b ได้ดังสมการที่ (19)–(20)

$$\kappa_1^b = \frac{L^b}{E^b} = -\frac{1}{b} \quad (19)$$

$$\kappa_2^b = \frac{N^b}{G^b} = -\frac{\sin\theta}{(b\sin\theta - c)} \quad (20)$$

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูป

เมื่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนเกิดการเสียรูปเนื่องจากแรงดันภายใน จะสามารถคำนวณหาค่าเวคเตอร์ระบุตำแหน่งการเสียรูปของพื้นผิว S_U^a และ S_L^a ได้ดังสมการที่ (21)

$$\mathbf{R}_d^a = \mathbf{R}^a + \left(\frac{\mathbf{R}_\theta^a}{\sqrt{E^a}}\right)u^a + \left(\frac{\mathbf{R}_\phi^a}{\sqrt{G^a}}\right)v^a + \hat{\mathbf{n}}^a w^a \quad (21)$$

เมื่อ (u,v,w) คือ องค์ประกอบของค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน แนวพิกัดลองจิจูด และแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน ตามลำดับ สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างเปลือกบางที่มีความสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Shells) จะกำหนดให้ค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดลองจิจูดมีค่าเท่ากับศูนย์ ($v = 0$) ดังนั้น จะสามารถคำนวณองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ที่สภาวะหลังการเสียรูป [22] ได้ดังสมการที่ (22)–(23)

$$\varepsilon_\theta^a = \frac{u_\theta^a + w^a}{a} + \frac{(u_\theta^a + w^a)^2}{2a^2} + \frac{(-u^a + w_\theta^a)^2}{2a^2} \quad (22)$$

$$\varepsilon_\phi^a = \frac{u^a}{a\tan\theta} + w^a + \frac{1}{2}\left(\frac{u^a}{a\tan\theta} + w^a\right)^2 \quad (23)$$

จากทฤษฎีโครงสร้างเปลือกบางของ Langhaar [17] และ Jiammeepreecha และคณะ [21] สามารถนิยามเซตของความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ได้ดังสมการที่ (24) – (25)

$$\kappa_\theta^a = -\frac{w_{\theta\theta}^a}{a^2} \quad (24)$$

$$\kappa_\phi^a = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{w_\theta^a}{\tan\theta} + \frac{w_{\phi\phi}^a}{\sin^2\theta}\right) \quad (25)$$

กำหนดให้ $\lfloor \mathbf{g}^a \rfloor = \lfloor u^a \quad w^a \quad u_\theta^a \quad w_\theta^a \quad u_{\theta\theta}^a \quad w_{\theta\theta}^a \rfloor$ จากสมการที่ (22)–(25) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูป ในรูปแบบของเมตริกซ์ดังสมการที่ (26)–(27)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^a = \lfloor \mathbf{L}_i^a \rfloor\{\mathbf{g}^a\} + \frac{1}{2}\lfloor \mathbf{g}^a \rfloor[\mathbf{H}_i^a]\{\mathbf{g}^a\} \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_i^a = \lfloor \mathbf{S}_i^a \rfloor\{\mathbf{g}^a\} \quad (27)$$

เมื่อ $\{\mathbf{L}_i^a\}$ และ $[\mathbf{H}_i^a]$ คือ เวคเตอร์และเมตริกซ์สมมาตรของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเสียรูป ตามลำดับ และ $\{\mathbf{S}_i^a\}$ คือ เวคเตอร์ของความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูป ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (28)–(29)

$$\left\{\mathbf{S}_1^a\right\}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\left\{\mathbf{S}_2^a\right\}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2 \tan\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

เนื่องจากเป็นปัญหา แบบสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Problem) ดังนั้นค่า $w_{\phi\phi}^a = 0$ สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูปของพื้นผิว S_U^b และ S_L^b จะมีค่าดังสมการที่ (30)

$$\mathbf{R}_d^b = \mathbf{R}^b + \left(\frac{\mathbf{R}_\theta^b}{\sqrt{E^b}}\right)u^b + \left(\frac{\mathbf{R}_\phi^b}{\sqrt{G^b}}\right)v^b + \hat{\mathbf{n}}^b w^b \quad (30)$$

และสามารถคำนวณองค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์ที่สภาวะหลังการเสียรูปได้ดังสมการที่ (31)–(32)

$$\varepsilon_\theta^b = \frac{u_\theta^b + w^b}{b} + \frac{(u_\theta^b + w^b)^2}{2b^2} + \frac{(-u^b + w_\theta^b)^2}{2b^2} \quad (31)$$

$$\varepsilon_\phi^b = \frac{u^b\cos\theta + w^b\sin\theta}{(\mathrm{b}\sin\theta - \mathrm{c})} + \frac{(u^b\cos\theta + w^b\sin\theta)^2}{2(\mathrm{b}\sin\theta - \mathrm{c})^2} \quad (32)$$

ค่าความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูปในเทอมขององค์ประกอบเมตริกซ์เทนเซอร์จะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (33)–(34)

$$\kappa_\theta^b = -\frac{w_{\theta\theta}^b}{b^2} \quad (33)$$

$$\kappa_\phi^b = -\left[\frac{w_\theta^b \cos\theta}{b(b\sin\theta - c)} + \frac{w_{\phi\phi}^b}{(b\sin\theta - c)^2}\right] \quad (34)$$

ถ้ากำหนดให้ $\lfloor \mathbf{g}^b \rfloor = \lfloor u^b \quad w^b \quad u_\theta^b \quad w_\theta^b \quad u_{\theta\theta}^b \quad w_{\theta\theta}^b \rfloor$ จะสามารถ เขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความโค้งกับระยะการเสียรูป ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ โดยเปลี่ยนตัวยก a เป็น b ในสมการที่ (26) และ (27) ตามลำดับ ดังนั้น จะสามารถนิยามเวคเตอร์ของความสัมพันธ์ระหว่างความโค้ง-การเสียรูป $\{\mathbf{S}_i^b\}$ โดยกำหนดให้ $w_{\phi\phi}^b = 0$ ดังสมการที่ (35)–(36)

$$\left\{\mathbf{S}_1^b\right\}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\left\{\mathbf{S}_2^a\right\}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos\theta}{b(b\sin\theta - c)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

2.5 พลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรน

ค่าพลังงานความเครียด เนื่องจากผลของเมมเบรน (Strain Energy due to Membrane Stiffness) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (37)

$$\left[U_m\right] = \begin{bmatrix} \left[U_m^U\right] & 0 \\ 0 & \left[U_m^L\right] \end{bmatrix} \quad (37)$$

เมื่อ $\left[U_m^U\right]$ และ $\left[U_m^L\right]$ คือ เมตริกซ์ของพลังงานความเครียดเนื่องจากผลของเมมเบรนสำหรับโครงสร้างเปลือกบางส่วนบนและส่วนล่าง ตามลำดับ ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (38)–(39)

$$\left[U_m^U\right] = \begin{bmatrix} U_m^a & 0 \\ 0 & U_m^b \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\left[U_m^L\right] = \begin{bmatrix} U_m^a & 0 \\ 0 & U_m^b \end{bmatrix} \quad (39)$$

ในที่นี้ U_m^a และ U_m^b สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (40)

$$U_m = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \lfloor \varepsilon \rfloor [C'] \{\varepsilon\}\, d\theta \quad (40)$$

เมื่อ $[C']$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการยืดหดตัว (Extensional Rigidity) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (41)

$$[C'] = \frac{E'h}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

เมื่อ h คือ ความหนาของโครงสร้าง, E' คือ มอดุลัสยืดหยุ่น (Elastic Modulus) และ μ คือ อัตราส่วนปัวซง (Poisson’s Ratio) สมการที่ (40) สามารถจัดรูปใหม่ในเทอมของค่าการแปรผันได้ดังสมการที่ (42)

$$\delta U_m=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\delta\{g\}^T\left([k_m]+[n_{1m}]+[n_{2m}]\right)\{g\}d\theta \tag{42}$$

เมื่อ $[k_m]$, $[n_{1m}]$ และ $[n_{2m}]$ สามารถนิยามได้จากสมการที่ (43)–(45)

$$[k_m]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C'_{ij}\left(\{L_i\}\{L_j\}^T\right) \tag{43}$$

$$[n_{1m}]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C'_{ij}\begin{bmatrix}\left(\{L_i\}\{g\}^T\right)[H_j]\\ +\left(\{g\}^T\{L_i\}\right)[H_j]\\ +[H_i]\left(\{g\}\{L_j\}^T\right)\end{bmatrix} \tag{44}$$

$$[n_{2m}]=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C'_{ij}\begin{bmatrix}[H_i]\left(\{g\}\{g\}^T\right)[H_j]\\ +\frac{1}{2}\left(\{g\}^T[H_j]\{g\}\right)[H_i]\end{bmatrix} \tag{45}$$

ในขณะที่ค่าพลังงานความเครียด เนื่องจากผลของโมเมนต์ดัด (Strain Energy due to Bending Stiffness) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน จะสามารถเขียนได้โดยเปลี่ยนตัวห้อย m เป็น b ในสมการที่ (37) ถึง (39) โดยที่ U_b^a และ U_b^b สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (46)

$$U_b=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\lfloor\kappa\rfloor[D']\{\kappa\}\,d\theta \tag{46}$$

เมื่อ $[D']$ คือ เมตริกซ์ความแข็งแกร่งเนื่องจากการดัด (Flexural Rigidity) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (47)

$$\left[D'\right]=\frac{E'h^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}1 & \mu\\ \mu & 1\end{bmatrix} \tag{47}$$

สมการที่ (46) สามารถจัดรูปใหม่ในเทอมของค่าการแปรผันได้ดังสมการที่ (48)

$$\delta U_b=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\delta\{g\}^T[k_b]\{g\}d\theta \tag{48}$$

เมื่อ $[k_b]$ สามารถนิยามได้จากสมการที่ (49)

$$[k_b]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}D'_{ij}\left(\{S_i\}\{S_j\}^T\right) \tag{49}$$

2.6 งานเสมือนเนื่องจากแรงดันภายใน

จากหลักการของงานเสมือน [21] จะสามารถคำนวณค่างานเสมือนเนื่องจากแรงดันภายใน (Virtual Work Done by Internal Pressure) ที่กระทำต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน ดังสมการที่ (50)

$$\delta\Omega=-p_o\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{\delta\mathbf{w}\}\sqrt{E^\alpha G^\alpha}\,d\theta \tag{50}$$

เมื่อ p_o คือค่าแรงดันสม่ำเสมอภายใน และ $\alpha = a,b$

2.7 เงื่อนไขของความต่อเนื่อง

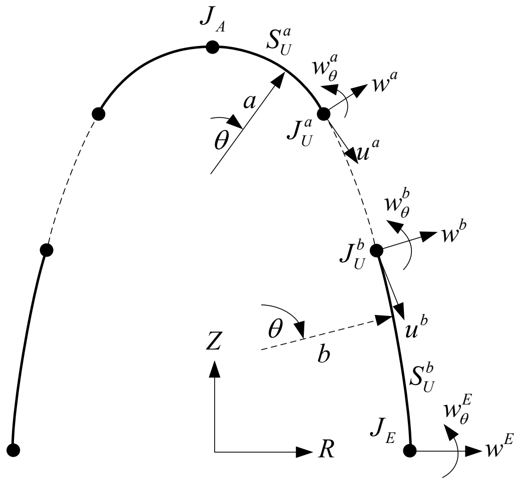
พิจารณาโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน ดังแสดงในรูปที่ 2 พบว่า ที่จุดเชื่อมต่อ J_U จะทำหน้าที่เชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S_U^a และ S_U^b ในขณะที่จุดเชื่อมต่อ J_L จะทำหน้าที่เชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว S_L^a และ S_L^b ดังนั้นจุดเชื่อมต่อทั้งสองจุดจำเป็นจะต้องกำหนดให้มีความต่อเนื่อง (Continuous) และราบเรียบ (Smooth) เพื่อให้ค่าการเสียรูป (Displacement) และความลาดชัน (Slope) มีความสอดคล้องและต่อเนื่องกันระหว่างพื้นผิวทั้งสองส่วน ดังนั้น งานวิจัยในโครงการนี้จึงกำหนดให้ชิ้นส่วนย่อยมีความต่อเนื่อง โดยใช้หลักการของตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange's Multiplier Technique) [20] ดังนั้น สามารถเขียนเงื่อนไขของความต่อเนื่องที่จุดเชื่อมต่อ J_U ได้ดังสมการที่ (51)–(54)

$$G_1=u_U^a-u_U^b=0 \tag{51}$$

$$G_2=w_U^a-w_U^b=0 \tag{52}$$

$$G_3=\frac{du_U^a}{d\theta}-\frac{du_U^b}{d\theta}=0 \tag{53}$$

$$G_4=\frac{dw_U^a}{d\theta}-\frac{dw_U^b}{d\theta}=0 \tag{54}$$



รูปที่ 2 เงื่อนไขความต่อเนื่อง

สำหรับโครงสร้างส่วนล่างใต้แนวรัศมี R สามารถทำได้โดยใช้เงื่อนไขของความต่อเนื่องที่จุดเชื่อมต่อ J_L ได้ดังสมการที่ (55)–(58)

$$G_5 = u_L^a - u_L^b = 0 \tag{55}$$

$$G_6 = w_L^a - w_L^b = 0 \tag{56}$$

$$G_7 = \frac{du_L^a}{d\theta} - \frac{du_L^b}{d\theta} = 0 \tag{57}$$

$$G_8 = \frac{dw_L^a}{d\theta} - \frac{dw_L^b}{d\theta} = 0 \tag{58}$$

ในที่นี้ ค่าความต่อเนื่องจากการเสียรูปและความลาดชันเป็นค่าที่ต้องการในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้น ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของค่าการเสียรูป ได้แก่ $d^2u_U^a/d\theta^2$, $d^2w_U^a/d\theta^2$, $d^2u_U^b/d\theta^2$ และอื่น ๆ จะไม่นำมาพิจารณาแบบจำลองครั้งนี้

2.8 ผลรวมงานเสมือนประยุกต์

จากหลักการของงาน [19] และหลักการของตัวคูณลากรองจ์ [20] จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือนประยุกต์ (Modified Total Virtual Work) ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน ได้ดังสมการที่ (59)

$$\delta\pi_m = \delta\pi_e + \delta\pi_c \tag{59}$$

เมื่อ $\delta\pi_e$ คือ ผลรวมงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (60)

$$\delta\pi_e = \delta U_m + \delta U_b + \delta\Omega \tag{60}$$

เมื่อ δU_m , δU_b และ $\delta\Omega$ คำนวณได้จากสมการที่ (42) (48) และ (50) ตามลำดับ สำหรับค่า $\delta\pi_c$ คือ ผลเนื่องจากเงื่อนไขของความต่อเนื่องที่จุดเชื่อมต่อจะมีค่าดังสมการที่ (61)

$$\begin{aligned}\delta\pi_c = {} & (u_U^a - u_U^b)\delta\lambda_1 + (w_U^a - w_U^b)\delta\lambda_2 \\ & + \left(\frac{du_U^a}{d\theta} - \frac{du_U^b}{d\theta}\right)\delta\lambda_3 + \left(\frac{dw_U^a}{d\theta} - \frac{dw_U^b}{d\theta}\right)\delta\lambda_4 \\ & + (u_L^a - u_L^b)\delta\lambda_5 + (w_L^a - w_L^b)\delta\lambda_6 \\ & + \left(\frac{du_L^a}{d\theta} - \frac{du_L^b}{d\theta}\right)\delta\lambda_7 + \left(\frac{dw_L^a}{d\theta} - \frac{dw_L^b}{d\theta}\right)\delta\lambda_8\end{aligned} \tag{61}$$

เมื่อ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_8$ คือ ค่าตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange's Multiplier) โดยสามารถหาได้จากสมการที่ (51) ถึง (58) ดังนั้น สมการที่ (61) จะสามารถเขียนในรูปแบบของเมตริกซ์ดังสมการที่ (62)

$$\delta\pi_c = \{\delta\boldsymbol{\lambda}\}^T \left([\mathbf{G}]^T \{\mathbf{D}\}\right) \tag{62}$$

เมื่อ $\{\mathrm{D}\}$ และ $[\mathrm{G}]$ คำนวณได้จากสมการที่ (63)–(64)

$$\{\mathbf{D}\}^T = \begin{bmatrix} u_U^a & w_U^a & \dfrac{du_U^a}{d\theta} & \dfrac{dw_U^a}{d\theta} & \dots \\ \dots & u_U^b & w_U^b & \dfrac{du_U^b}{d\theta} & \dfrac{dw_U^b}{d\theta} \\ \dots & u_L^a & w_L^a & \dfrac{du_L^a}{d\theta} & \dfrac{dw_L^a}{d\theta} \\ \dots & u_L^b & w_L^b & \dfrac{du_L^b}{d\theta} & \dfrac{dw_L^b}{d\theta} \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$[\mathbf{G}]=\begin{bmatrix}[I]\\-[I]\\[I]\\-[I]\end{bmatrix} \tag{64}$$

เมื่อ $[I]$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) ขนาด 4x4 จากสมการที่ (62) ค่า $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_8$ จะสามารถหาได้โดยอัตโนมัติ จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Procedure) สำหรับผลลัพธ์เชิงตัวเลขแบบไม่เป็นเชิงเส้น

2.9 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์การเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในร่วมกับวิธีตัวคูณลากรองจ์ เพื่อหาค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางจะสามารถทำได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ [20] จากรูปที่ 1 จะทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัด θ งานวิจัยนี้ ใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับที่ห้าในการประมาณค่าการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสและแนวเส้นตั้งฉาก ดังสมการที่ (65)

$$\{\mathbf{g}\}=[\boldsymbol{\psi}]\{\mathbf{d}\} \tag{65}$$

เมื่อ $\{\mathbf{g}\}$ คือ เวคเตอร์การเคลื่อนที่ ภายในเอลิเมนต์, $\{\mathbf{d}\}$ คือ เวคเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อขั้วและ $[\boldsymbol{\psi}]$ คือ เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่ห้า (Fifth-order Polynomial Shape Function) สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (66)

$$[\psi]=\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0\\ 0 & N_1 & 0 & \dots & N_6\\ N_{1,\varphi} & 0 & N_{2,\varphi} & \dots & 0\\ 0 & N_{1,\varphi} & 0 & \dots & N_{6,\varphi}\\ N_{1,\varphi\varphi} & 0 & N_{2,\varphi\varphi} & \dots & 0\\ 0 & N_{1,\varphi\varphi} & 0 & \dots & N_{6,\varphi\varphi}\end{bmatrix} \tag{66}$$

แทนค่าสมการที่ (65) ลงในสมการที่ (60) จะสามารถเขียนผลรวมงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน ดังสมการที่ (67)

$$\delta\pi_e=\lfloor\delta\mathbf{d}\rfloor\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\boldsymbol{\psi}]^T[\mathbf{k}_L][\boldsymbol{\psi}]d\theta\{\mathbf{d}\} +\lfloor\delta\mathbf{d}\rfloor\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\boldsymbol{\psi}]^T[\mathbf{k}_{NL}][\boldsymbol{\psi}]d\theta\{\mathbf{d}\}+\{\mathbf{f}\} \tag{67}$$

เมื่อ $[\mathbf{k}_L]$ และ $[\mathbf{k}_{NL}]$ คือ ค่าเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย แบบเป็นเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น ตามลำดับ ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (68)–(69)

$$[\mathbf{k}_L]=[\mathbf{k}_m]+[\mathbf{k}_b] \tag{68}$$

$$[\mathbf{k}_{NL}]=\frac{1}{2}[\mathbf{n}_{1m}]+\frac{1}{3}[\mathbf{n}_{2m}] \tag{69}$$

และ $\{\mathbf{f}\}$ คือ ค่าเวคเตอร์ของแรงในชิ้นส่วนย่อย ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (70)

$$\{\mathbf{f}\}=-p_o\lfloor\delta\mathbf{w}\rfloor\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{\boldsymbol{\psi}\}\sqrt{EG}d\theta \tag{70}$$

เนื่องจากดีกรีอิสระเฉพาะที่ $\{\mathbf{d}\}$ เหมือนกับดีกรีอิสระรวม $\{\mathbf{D}\}$ ดังนั้น สมการที่ (59) จะอยู่ในสภาวะสมดุลได้โดยการกำหนดให้ค่าผลรวมงานเสมือนประยุกต์ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันสม่ำเสมอภายในมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังสมการที่ (71)

$$\delta\pi_m=\left(\frac{\partial\pi_m}{\partial D_i}\right)\delta D_i+\left(\frac{\partial\pi_m}{\partial\lambda_i}\right)\delta\lambda_i=0 \tag{71}$$

เนื่องจาก δD_i และ $\delta\lambda_i$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือเทอมในสมการที่ (71) จะต้องมีเงื่อนไขดังสมการที่ (72) และ (73)

$$\frac{\partial\pi_m}{\partial D_i}=\frac{\partial\pi_e}{\partial D_i}+\frac{\partial\pi_c}{\partial D_i}=0 \tag{72}$$

$$\frac{\partial\pi_m}{\partial\lambda_i}=\frac{\partial\pi_e}{\partial\lambda_i}+\frac{\partial\pi_c}{\partial\lambda_i}=0 \tag{73}$$

ดังนั้น สมการที่ (72) และ (73) จะสามารถเขียนได้ในรูปแบบของเมตริกซ์ ดังสมการที่ (74)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^a & \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}^a \\ \mathbf{D}^b \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^a \\ \mathbf{F}^b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{74}$$

เมื่อ $\mathbf{K}^a$ และ $\mathbf{K}^b$ คำนวณได้จากสมการที่ (75)–(76)

$$\mathbf{K}^a = \left[\mathbf{K}^a_m\right] + \left[\mathbf{K}^a_b\right] + \frac{1}{2}\left[\mathbf{N}^a_{1m}\right] + \frac{1}{3}\left[\mathbf{N}^a_{2m}\right] \tag{75}$$

$$\mathbf{K}^b = \left[\mathbf{K}^b_m\right] + \left[\mathbf{K}^b_b\right] + \frac{1}{2}\left[\mathbf{N}^b_{1m}\right] + \frac{1}{3}\left[\mathbf{N}^b_{2m}\right] \tag{76}$$

เนื่องจากเป็นปัญหาของ โครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตร ดังนั้น เงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งบนสุดและล่างสุดที่จุด J_A ของโครงสร้างเปลือกบาง จะมีค่าดังสมการที่ (77)–(78)

$$u^a_U = \frac{dw^a_U}{d\theta} = 0 \tag{77}$$

$$u^a_L = \frac{dw^a_L}{d\theta} = 0 \tag{78}$$

สำหรับจุด J_E ที่แนวระนาบของอิเควเตอร์ จะมีเงื่อนไขความต่อเนื่อง ดังสมการที่ (79)–(80)

$$u^b_U = \frac{dw^b_U}{d\theta} = 0 \tag{79}$$

$$u^b_L = \frac{dw^b_L}{d\theta} = 0 \tag{80}$$

โดยที่ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น ดังแสดงในสมการที่ (74) จะต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจากสมการที่ (77) ถึงสมการที่ (80) จึงจะสามารถคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ด้วยวิธีกระบวนการทำซ้ำ (Iterative Procedure)

3. ผลการทดลอง

ผลการศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับพฤติกรรมการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์สามารถคำนวณได้ โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับวิธีกระบวนการทำซ้ำ ในการศึกษาครั้งนี้จะใช้ค่าพารามิเตอร์สมบัติของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน ดังแสดงในตารางที่ 1 สำหรับการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัด θ ของโครงสร้างเปลือกบางส่วนบนและส่วนล่าง จะมีค่าเท่ากับ 6 องศา และส่วนกลางจะมีค่าเท่ากับ 2 องศา นั่นคือผลรวมของจำนวนชิ้นส่วนย่อยในงานวิจัยนี้เท่ากับ 50 ชิ้นส่วน เนื่องจากค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน (w) ซึ่งจะเป็นค่าการเสียรูปหลัก ซึ่งมีอิทธิพลสูงกว่าค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน (u) จะมีค่าการเปลี่ยนแปลงสูงในช่วงส่วนกลางของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทำการแบ่งชิ้นส่วนย่อยด้วยมุมรองรับที่มีความละเอียดสูงกว่า อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาจากความยาวของแต่ละชิ้นส่วนย่อยจะพบว่า ความยาวมีขนาดเท่ากัน

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมีส่วนบน (a)	5 เมตร
ความยาวรัศมีส่วนกลาง (b)	15 เมตร
ความหนาของโครงสร้าง (h)	0.01 เมตร
แรงดันสม่ำเสมอภายใน (p_o)	1 เมกะปาสคาล
มุมที่รองรับส่วนโค้ง (β)	60 องศา
มอดุลัสยืดหยุ่น (E')	200×10^3 เมกะปาสคาล
อัตราส่วนปัวซง (μ)	0.3

3.1 พื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบาง

เนื่องจากข้อดีของโครงสร้างประเภทนี้มีประสิทธิภาพในการบรรจุได้สูงกว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมมาตรฐาน เมื่อพิจารณาอัตราส่วนของพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้น หัวข้อแรกจะเป็นการศึกษา

พื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน โดยคำนวณได้จากหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [17] ดังสมการที่ (81)–(82)

$$S = 2\pi\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{E^aG^a}\,d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{E^bG^b}\,d\theta\right] \quad (81)$$

$$V = \frac{2\pi}{3}\left[\begin{aligned}&\int_{\theta_1}^{\theta_2}(a+d\cos\theta)\sqrt{E^aG^a}\,d\theta\\ &+\int_{\theta_1}^{\theta_2}(b-c\sin\theta)\sqrt{E^bG^b}\,d\theta\end{aligned}\right] \quad (82)$$

สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของพื้นที่ผิว และความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนสามารถทำได้โดยเปรียบเทียบกับสมการแบบแม่นตรง ดังแสดงในรูปที่ 3 จะสามารถหาพื้นที่ผิวของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนได้จากสมการที่ (83)

$$\tilde{S} = 2\pi\left(\tilde{S}_a + \tilde{S}_b\right) \quad (83)$$

เมื่อ $\tilde{S}_a$ และ $\tilde{S}_b$ คำนวณได้จากสมการที่ (84) และ (85)

$$\tilde{S}_a = 2a(1-\cos\beta) \quad (84)$$

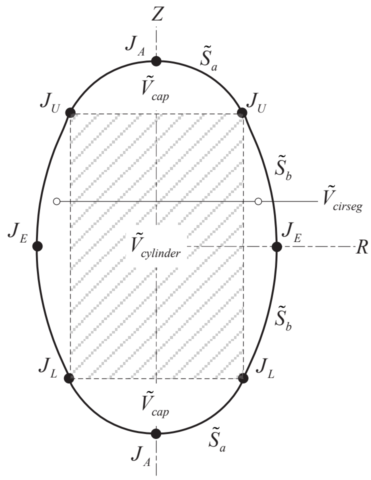
$$\tilde{S}_b = 2b^2\cos\beta - 2\pi b(b-a)\sin\beta\left(\frac{90-\beta}{180}\right) \quad (85)$$

กำหนดให้ $\alpha = 90^\circ - \beta$ สำหรับการคำนวณหาความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนได้ดังสมการที่ (86)

$$\tilde{V} = 2\pi\left(\tilde{V}_{cap} + \tilde{V}_{cylinder} + \tilde{V}_{cirseg}\right) \quad (86)$$

เมื่อ $\tilde{V}_{cap}$, $\tilde{V}_{cylinder}$ และ $\tilde{V}_{cirseg}$ คำนวณได้จากสมการที่ (87)–(89)

$$\tilde{V}_{cap} = a(1-\cos\beta)\left[\frac{(a\sin\beta)^2}{2} + \frac{a^2(1-\cos\beta)^2}{6}\right] \quad (87)$$



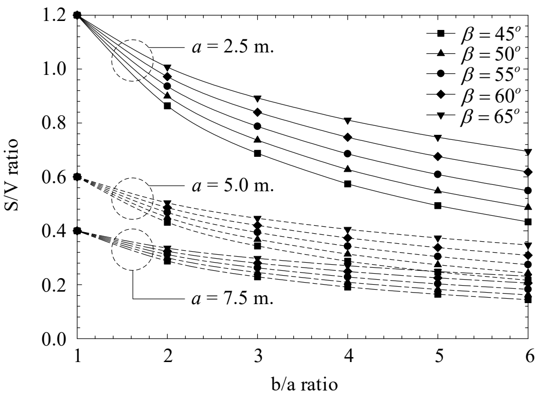
รูปที่ 3 พื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบาง

$$\tilde{V}_{cylinder} = a^2b\sin^2\beta\cos\beta \quad (88)$$

$$\tilde{V}_{cirseg} = \frac{2b^3\cos^3\beta}{3} - \frac{b^2c}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{90} - \sin 2\alpha\right) \quad (89)$$

จากสมการที่ (83) และ (86) จะสามารถคำนวณหาขนาดพื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนได้เท่ากับ 716.064 ตารางเมตร และ 1,705.285 ลูกบาศก์เมตร ตามลำดับ ซึ่งจะตรงกับขนาดพื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนที่คำนวณจากสมการที่ (81) และ (82)

สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ ในการบรรจุของโครงสร้างเปลือกบางจะทำได้โดยการเปรียบเทียบกับโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความยาวรัศมีเท่ากับ 5 เมตร พบว่า มีขนาดของพื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเท่ากับ 314.159 ตารางเมตร และ 523.599 ลูกบาศก์เมตร ตามลำดับ โดยมีค่าอัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้าง (S/V Ratio) เท่ากับ 0.600 และมีค่าสูงกว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนทุกค่าพารามิเตอร์ ดังแสดงในตารางที่ 2 นั่นคือโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน มีประสิทธิภาพในด้านการบรรจุสูงกว่าโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความยาวรัศมีคงที่นั่นเอง โดยในที่นี้จะพบว่า โครงสร้างเปลือกบางรูป



รูปที่ 4 ผลของการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีและมุม β ที่มีต่อค่าอัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างเปลือกบาง

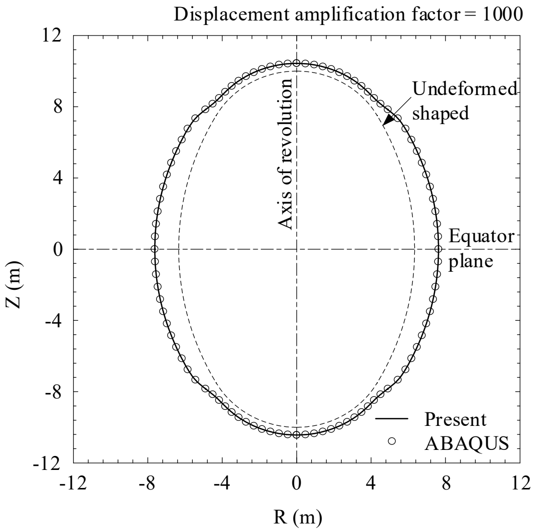
ทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนที่มีประสิทธิภาพสูงสุด คือ เมื่อ b มีค่าเท่ากับ 25 เมตร และ β เท่ากับ 45 องศา เนื่องจากให้ค่าอัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างต่ำสุด นอกจากนี้ยังพบว่า ค่าอัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง (β) มีค่าสูงขึ้น และเมื่อค่าอัตราส่วนของความยาวรัศมี (b/a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ส่งผลทำให้อัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 4 สำหรับทุกกรณีที่ความยาวรัศมีของโครงสร้างส่วนบนและส่วนล่างมีค่าคงที่เท่ากับ 2.5 ถึง 7.5 เมตร ในที่นี้กรณีที่อัตราส่วนของความยาวรัศมี (b/a) เท่ากับ 1.0 จะเป็นโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีความยาวรัศมีคงที่ตลอดหน้าตัด

ตารางที่ 2 พื้นที่ผิวและความจุของโครงสร้างเปลือกบาง

ความยาวรัศมีส่วนกลาง (เมตร)	มุมที่รองรับส่วนโค้ง (องศา)	พื้นที่ผิว (ตารางเมตร)	ความจุ (ลูกบาศก์เมตร)	อัตราส่วนพื้นที่ผิวต่อความจุ
10.0	45	631.648	1,463.125	0.432
	50	583.948	1,298.167	0.450
	55	540.337	1,154.600	0.468
	60	500.487	1,029.815	0.486
	65	463.998	921.108	0.504
15.0	45	1,044.483	3,039.103	0.344
	50	921.587	2,503.689	0.368
	55	812.498	2,063.984	0.394
	60	716.064	1,705.285	0.420
	65	630.907	1,413.419	0.446
20.0	45	1,552.662	5,411.263	0.287
	50	1,327.076	4,231.867	0.314
	55	1,130.643	3,300.215	0.343
	60	960.888	2,573.023	0.373
	65	814.884	2,009.985	0.405
25.0	45	2156.187	8739.332	0.247
	50	1,800.417	6,574.401	0.274
	55	1,494.771	4,911.760	0.304
	60	1,234.961	3,656.041	0.338
	65	1,015.932	2,720.259	0.373

3.2 พฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน

ในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาพฤติกรรมการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในโดยใช้ค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 1 ในที่นี้กำหนดให้ค่าแรงดันภายในแบบสม่ำเสมอ (p_o) มีค่าเท่ากับ 1 เมกะปาสคาล ซึ่งจะมีลักษณะการเสียรูปดังแสดงในรูปที่ 5 นอกจากนี้ยังพบว่า ค่าการเสียรูปที่เกิดขึ้นจะใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้แบบจำลองในโปรแกรม ABAQUS [23] ที่ใช้ชิ้นส่วนย่อยโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตร (SAX2) ที่นิยามฟังก์ชันรูปร่างอันดับที่สอง (Quadratic Interpolation Function) สำหรับการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยในบทความนี้ที่เป็นชิ้นส่วนคานที่นิยามแบบฟังก์ชันรูปร่างโพลิโนเมียลอันดับที่ห้า รูปที่ 6 แสดงค่าการเสียรูปตามแนวราบและแนวดิ่ง (Horizontal and Vertical Displacements) พบว่า มีค่าใกล้เคียงมากเมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองในโปรแกรม ABAQUS

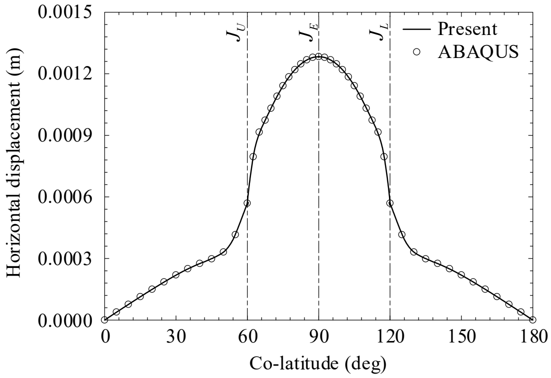


รูปที่ 5 การเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในสม่ำเสมอ

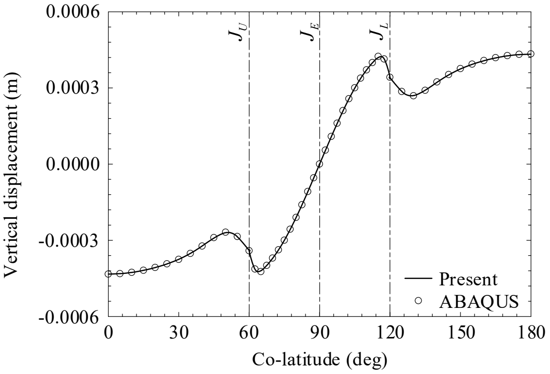
รูปที่ 6 พบว่า มีค่าความแตกต่างอยู่ที่ร้อยละ 0.1225 และ 0.0228 ที่ตำแหน่งจุดเชื่อมต่อที่ปลายยอด (Apex) และระนาบอิเควเตอร์ (Equatorial Plane) ตามลำดับ จากนั้นทำการเปรียบเทียบที่ตำแหน่งจุดเชื่อมต่อระหว่างพื้นผิว นั่นคือ จุดเชื่อมต่อ J_U และ J_L พบว่า มีค่าความแตกต่างอยู่ที่ร้อยละ 0.1544 และ 0.4901 สำหรับค่าการเสียรูปตามแนวราบและแนวดิ่งตามลำดับ สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนกับแนวพิกัด θ ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในสม่ำเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 7

รูปที่ 7 พบว่า ค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนมีการเปลี่ยนแปลงสูงในช่วงตำแหน่งของจุดเชื่อมต่อ J_U, J_L, และ J_E เนื่องจากการเปลี่ยนความโค้งของชิ้นส่วนทำให้สติฟเนสของโครงสร้างมีค่าไม่เท่ากัน จึงส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปในแนวพิกัดเมอร์ริเดียนที่มีการเปลี่ยนแปลงสูงตรงบริเวณจุดเชื่อมต่อ J_U และ J_L ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงค่าการเสียรูปที่จุดต่อ J_E ตรงแนวระนาบของอิเควเตอร์มีค่าสูงเนื่องจากผลของเงื่อนไขความต่อเนื่องดังแสดงในสมการที่ (79) และ (80)

จากผลการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง



(ก) การเสียรูปตามแนวราบ



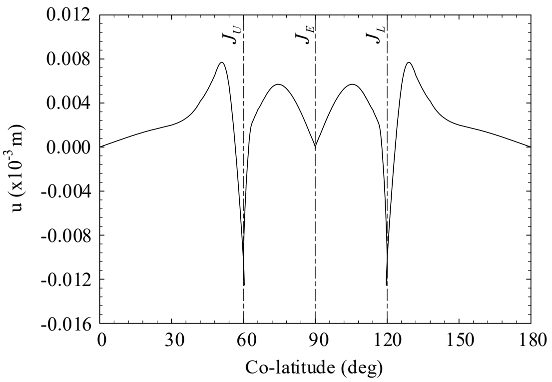
(ข) การเสียรูปตามแนวดิ่ง

รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปตามแนวราบและแนวดิ่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน

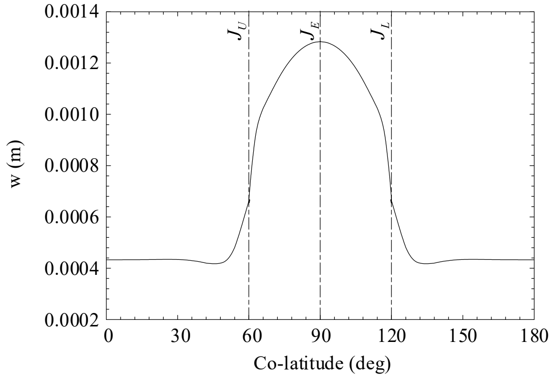
โครงสร้างเปลือกบางที่ได้จากงานวิจัยนี้ ก็จะสามารถทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ส่งผลต่อพฤติกรรมการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในสม่ำเสมอดังหัวข้อต่อไปนี้

3.3 ผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง

การศึกษาค่าพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อพฤติกรรมการเสียรูปมาก ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในหัวข้อแรกจะเริ่มต้นจากผลของการแปร

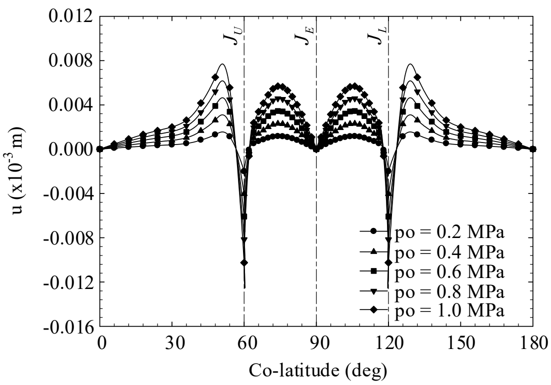


(ก) การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน

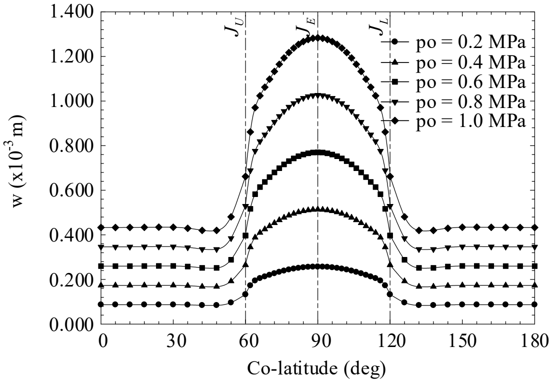


(ข) การเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปกับแนวพิกัด θ ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน



(ก) การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

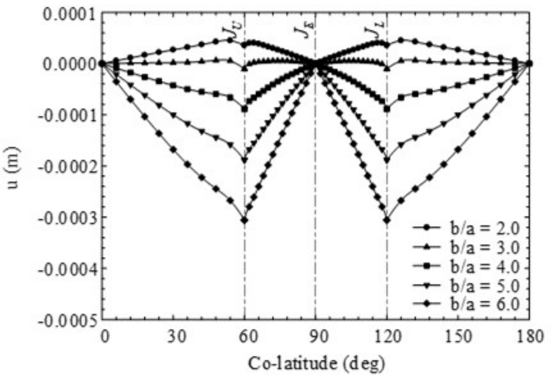
รูปที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน

เปลี่ยนแรงดันภายในตั้งแต่ 0.2 ถึง 1.0 เมกะปาสคาล โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ในตารางที่ 1 จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งพบว่า การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้น เมื่อค่าแรงดันภายในมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 8 โดยที่ค่าการเสียรูปที่มีค่าเพิ่มสูงขึ้นเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าแรงดันภายในที่เพิ่มสูงขึ้น

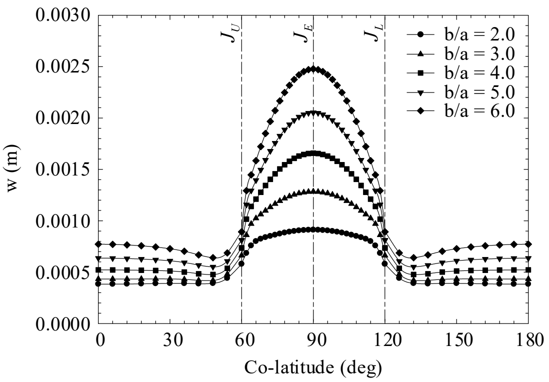
3.4 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง

การศึกษาผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อโครงสร้างเปลือกบางที่มีต่อพฤติกรรมการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายนอกสม่ำเสมอจะสามารถทำได้โดยใช้ค่าพารามิเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ดังแสดงในตารางที่ 1 และทำการแปรเปลี่ยนขนาดความยาวรัศมีของโครงสร้างเปลือกบางส่วนกลาง (b) โดยค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งพบว่า การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนจะมีค่าสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมี (b/a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 9

นอกจากนี้ยังพบว่า ค่าการเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเช่นเดียวกับการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน นั่นคือค่าการเสียรูปตามแนวตั้งฉาก

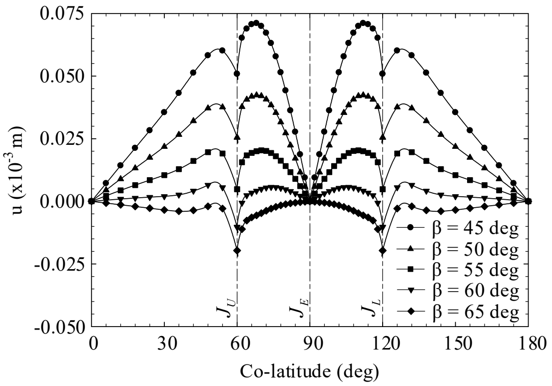


(ก) การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน

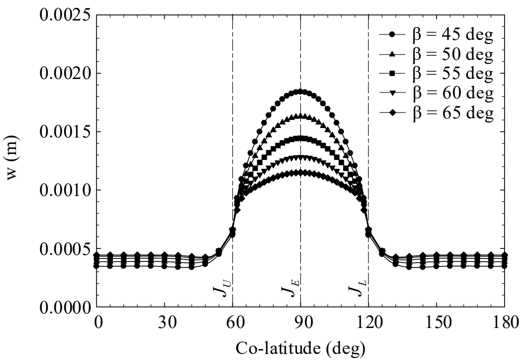


(ข) การเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

รูปที่ 9 ผลของการแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน



(ก) การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

รูปที่ 10 ผลของการแปรเปลี่ยนมุมรองรับส่วนโค้งที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน

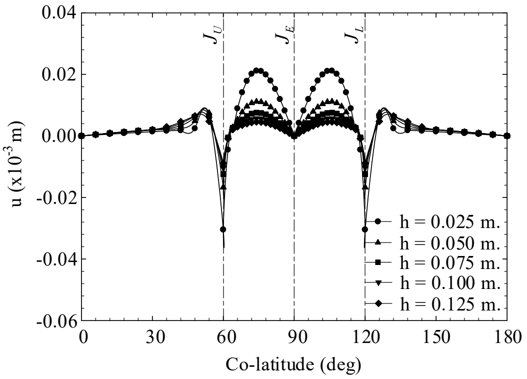
กับแนวเมอร์ริเดียนจะสูงขึ้น เมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมี (b/a) มีค่าเพิ่มสูงขึ้นนั่นเอง ดังนั้น การเพิ่มค่าอัตราส่วนความยาวรัศมี (b/a) จะส่งผลทำให้พื้นที่ผิวของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 2 ย่อมส่งผลทำให้มีพื้นที่ในการรับแรงมากขึ้นตามไปด้วย

3.5 ผลของการแปรเปลี่ยนมุมรองรับส่วนโค้งที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง

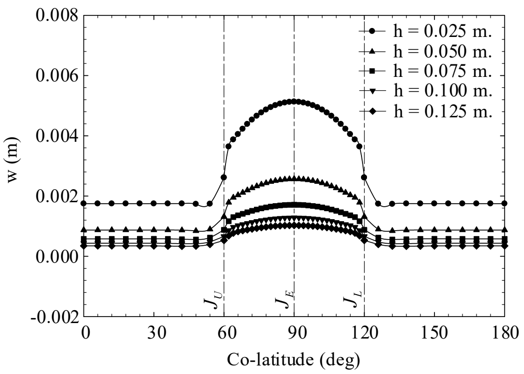
หัวข้อนี้จะทำการแปรเปลี่ยน ขนาดของมุมรองรับส่วนโค้งตั้งแต่ 45 ถึง 65 องศา โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ จะใช้ตามตารางที่ 1 การศึกษาพบว่า ค่าการเสียรูปมากตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อขนาดของมุมรองรับส่วนโค้งมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 10 ซึ่งจะสอดคล้องกับขนาดของพื้นที่ผิว ดังแสดงในตารางที่ 2 นั่นคือเมื่อขนาดของมุมรองรับส่วนโค้งมีค่าเพิ่มสูงขึ้นจะส่งผลทำให้ขนาดของพื้นที่ผิวโครงสร้างที่รองรับแรงดันภายในมีค่าลดลงนั่นเอง

3.6 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบาง

สำหรับหัวข้อสุดท้าย จะเป็นการศึกษาผลของการแปร



(ก) การเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน



(ข) การเสียรูปตามแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียน

รูปที่ 11 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน

เปลี่ยนความหนา ที่มีต่อค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายในภายใต้การเสียรูปมาก สำหรับค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์จะใช้ดังตารางที่ 1 โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ไม่เปลี่ยนแปลง

จากผลการศึกษาพบว่า เมื่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าลดลงส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปตามแนวเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับแนวเมอร์ริเดียนมีค่าเพิ่มสูงขึ้น เนื่องจากค่าสติฟเนสของโครงสร้างเปลือกบางจะมีค่าลดลงนั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 11 นอกจากนี้ยังพบว่า ในกรณีที่โครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนมีขนาดความหนาน้อยมาก จะส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มขึ้นสูงมาก เนื่องจากผลของค่าความแข็งแกร่งในเทอมของค่าการดัด (Flexural Rigidity) มีค่าน้อยมาก จากรูปที่ 11 แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่โครงสร้างเปลือกบางมีความหนาน้อยมาก สามารถที่จะใช้ทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) ในการวิเคราะห์แทนได้ โดยการพิจารณาผลของเมมเบรนเพียงอย่างเดียว

4. อภิปรายผลและสรุป

การศึกษาพฤติกรรมการเสียรูปมาก ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนร่วมกับเทคนิคตัวคูณลากรองจ์ภายใต้แรงดันสม่ำเสมอ โดยใช้ทฤษฎีเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ ในการคำนวณหารูปแบบพื้นฐานของพื้นผิวอันดับที่หนึ่งและสอง และสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วน โดยใช้สมการแปรผัน การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของค่าการเสียรูปมาก ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนจะสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยทำการแบ่งเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ในระบบพิกัดเชิงขั้วแบบทรงกลมร่วมกับกระบวนการทำซ้ำ

ผลการศึกษาพบว่า พฤติกรรมการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนรับแรงดันภายใน เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วที่ตำแหน่งจุดเชื่อมต่อของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมแบบหลายชิ้นส่วนสำหรับค่าการเสียรูปตามแนวพิกัดเมอร์ริเดียน การแปรเปลี่ยนค่าแรงดันภายในส่งผลต่อค่าการเสียรูปแบบเป็นสัดส่วนกันแต่ไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับการแปรเปลี่ยนความหนา การแปรเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวรัศมีและขนาดของมุมรองรับส่วนโค้งส่งผลต่อค่าการเสียรูปเนื่องจากผลของขนาดพื้นที่ผิวของโครงสร้างที่รองรับแรงดันที่เกิดขึ้นโดยตรง นั่น คือ เมื่อขนาดของพื้นที่ผิวโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น ย่อมส่งผลทำให้ค่าการเสียรูปมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย

ผลการศึกษาที่ได้จากบทความนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมการเสียรูปมากของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่น ๆ ได้ รวมถึงโครงสร้างเปลือกบางที่ทำจากวัสดุลามิเนต (Laminate Material) ได้

5. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับการสนับสนุนจาก กองทุนส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม ตามสัญญาเลขที่ FF66-P1-025

เอกสารอ้างอิง

[1] J. Blachut, "Minimum weight of internally pressurised domes subject to plastic load failure," *Thin-Walled Structures*, vol. 27, no. 2, pp. 127–146, 1997.

[2] E. Hamed, M. A. Bradford, and R. I. Gilbert, "Nonlinear long-term behaviour of spherical shallow thin-walled concrete shells of revolution," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, no. 2, pp. 204–215, 2010.

[3] W. Jiammeepreecha, S. Chucheepsakul, and T. Huang, "Nonlinear static analysis of deep water axisymmetric spherical half drop shell," *KMUTT Research and Development Journal*, vol. 37, no. 2, pp. 239–255, 2014 (in Thai).

[4] W. Jiammeepreecha, S. Chucheepsakul, and T. Huang, "Nonlinear static analysis of an axisymmetric shell storage container in spherical polar coordinates with constraint volume," *Engineering Structures*, vol. 68, pp. 111–120, 2014.

[5] W. Jiammeepreecha, S. Chucheepsakul, and T. Huang, "Parametric study of an equatorially anchored deepwater fluid-filled periodic symmetric shell with constraint volume," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 141, no. 8, pp. 04015019-1– 04015019-13, 2015.

[6] A. Zingoni, "Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics," *Thin-Walled Structures*, vol. 87, pp. 102–114, 2015.

[7] W. Jiammeepreecha, and S. Chucheepsakul, "Nonlinear axisymmetric free vibration analysis of liquid-filled spherical shell with volume constraint," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 139, no. 5, pp. 051016-1–051016-13, 2017.

[8] W. Jiammeepreecha, "Effects of internal pressure and constraint volume on vibration of spherical membrane," *RMUTI Journal Science and Technology*, vol. 10, no. 2, pp. 40–60, 2017.

[9] W. Jiammeepreecha, "Axisymmetric free vibration of fluid-filled membrane," *Engineering Journal Chiang Mai University*, vol. 25, no. 3, pp. 66–78, 2018 (in Thai).

[10] K. Chaidachatorn, W. Jiammeepreecha, and S. Jamnam, "Axisymmetric and antisymmetric free vibrations of inflated toroidal membrane," *The Journal of KMUTNB*, vol. 31, no. 4, pp. 661–674, 2021 (in Thai).

[11] A. Y. Evkin and O. V. Lykhachova, "Design buckling pressure for thin spherical shells: Development and validation," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 156–157, pp. 61–72, 2019.

[12] A. Zingoni, "Stresses and deformations in egg-shaped sludge digestors: Membrane effects," *Engineering Structures*, vol. 23, no. 11, pp. 1365–1372, 2001.

[13] A. Zingoni, "Stresses and deformations in egg-shaped sludge digestors: Discontinuity effects," *Engineering Structures*, vol. 23, no. 11, pp. 1373–1382, 2001.

[14] T. Hong and J. G. Teng, "Imperfection sensitivity and postbuckling analysis of elastic shells of

revolution," *Thin-Walled Structures*, vol. 46, no. 12, pp. 1338–1350, 2008.

[15] P. Jasion and K. Magnucki, "Elastic buckling of clothoidal–spherical shells under external pressure – theoretical study," *Thin-Walled Structures*, vol. 86, pp. 18–23, 2015.

[16] A. Zingoni and N. Enoma, "Strength and stability of spherical-conical shell assemblies under external hydrostatic pressure," *Thin-Walled Structures*, vol. 146, pp. 106472-1–106472-11, 2020.

[17] H. L. Langhaar, *Foundations of Practical Shell Analysis*, Illinois: Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1964.

[18] W. Jiammeepreecha and S. Chucheepsakul, "Nonlinear free vibration of internally pressurized axisymmetric spherical shell," *KMUTT Research and Development Journal*, vol. 40, no. 4, pp. 509–532, 2017 (in Thai).

[19] H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics*, New York : John Wiley & Sons, Inc., 1962.

[20] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[21] W. Jiammeepreecha, K. Chaidachatorn, and S. Chucheepsakul, "Nonlinear static response of an underwater elastic toroidal storage container," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 228, pp. 111134-1–111134-12, 2021.

[22] G. T. Mase and G. E. Mase, *Continuum Mechanics for Engineers*, Florida: CRC Press, 1999.

[23] *ABAQUS Analysis User's Manual*, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, Rhode Island, 2017.