บทความวิจัย

รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อ

สุภาภรณ์ สดวกดี*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08–4848–8410 อีเมล: aa_o_rr@hotmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2018.06.007
รับเมื่อ 7 กันยายน 2560 ตอบรับเมื่อ 8 ธันวาคม 2560 เผยแพร่ออนไลน์ 13 มิถุนายน 2561

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ คือ 1) เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และ 2) เพื่อหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ ผลการวิจัยพบว่า สำหรับกราฟเชื่อมต่อใดๆ ผลรวมของรงคเลขของกราฟต้นฉบับเป็นขอบเขตบนของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อ และค่าสูงสุดของรงคเลขของกราฟต้นฉบับเป็นขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อ นอกจากนั้น ยังได้เงื่อนไขสำหรับกราฟต้นฉบับที่เป็นกราฟบริบูรณ์ และเงื่อนไขสำหรับรอยเชื่อมที่เป็นกราฟบริบูรณ์ ที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ

คำสำคัญ: รงคเลข, กราฟเชื่อมต่อ, รอยเชื่อม

การอ้างอิงบทความ: สุภาภรณ์ สดวกดี, “รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อ,” *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 28, ฉบับที่ 3, หน้า 617–625, ก.ค.–ก.ย. 2561.

Research Article

Chromatic Numbers of Welded Graphs

Supaporn Saduakdee*

Program of Mathematics, Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok, Thailand

* Corresponding Author, Tel. 08–4848–8410, E–mail: aa_o_rr@hotmail.com

DOI: 10.14416/j.kmutnb.2018.06.007

Received 7 September 2017; Accepted 8 December 2017; Published online: 13 June 2018

Abstract

The purposes of this research are 1) to find upper and lower bounds of the chromatic numbers of welded graphs in terms of the chromatic numbers of their original graphs, and 2) to find conditions which make the chromatic numbers of welded graphs in terms of the chromatic numbers of their original graphs. The results are as follows: for any welded graph, the sum of the chromatic numbers of their original graphs is the upper bound of the chromatic number of the welded graph, and the maximum of the chromatic numbers of their original graphs is the lower bound of the chromatic number of the welded graph. Moreover, the condition for complete original graphs and the condition for complete patches are obtained, which make the chromatic numbers of welded graphs in terms of the chromatic numbers of their original graphs.

Keywords: Chromatic Number, Welded Graph, Patch

Please cite this article as: S. Saduakdee, "Chromatic numbers of welded graphs," *The Journal of KMUTNB*, vol. 28, no. 3, pp. 617–625, Jul.–Sep. 2018 (in Thai).

1. บทนำ

นักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ให้นิยามการดำเนินการระหว่างกราฟสองกราฟ เช่น กราฟร่วม (Joined Graph) กราฟปะติด (Glued Graph) เป็นต้น และศึกษาสมบัติต่างๆ และพารามิเตอร์ต่างๆ ของกราฟที่ได้จากการดำเนินการระหว่างกราฟสองกราฟที่กล่าวมา เพื่อให้เกิดความหลากหลายของกราฟและการศึกษาสมบัติต่างๆ ของกราฟได้กว้างขึ้น นอกจากนั้น ยังช่วยพัฒนาองค์ความรู้และงานวิจัยทางทฤษฎีกราฟ ยกตัวอย่างเช่น

ในปี ค.ศ. 2003 Uiyyasathian [1] ได้นิยามกราฟปะติดซึ่งเป็นการดำเนินการอย่างหนึ่งระหว่างกราฟสองกราฟ หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2006 Promsakon [2] และ Promsakon and Uiyyasathian [3] ได้ศึกษาลักษณะเฉพาะของกราฟปะติดที่ได้จากกราฟบางชนิด และหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของพารามิเตอร์บางค่าของกราฟปะติด เช่น จำนวนคลีก รงคเลข เป็นต้น ต่อมาในปี ค.ศ. 2008 Saduakdee [4] และ ค.ศ. 2009 Saduakdee and Uiyyasathian [5] ได้ศึกษาความสมบูรณ์ของกราฟปะติดซึ่งมีกราฟต้นฉบับสมบูรณ์ และหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้จำนวนคลีกและรงคเลขของกราฟปะติดในพจน์ของจำนวนคลีกและรงคเลขของกราฟต้นฉบับ ตามลำดับ นอกจากนั้น ยังหาเงื่อนไขที่ทำให้กราฟปะติดของกราฟสมบูรณ์ยังคงเป็นกราฟสมบูรณ์

ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะเพิ่มความหลากหลายของกราฟและศึกษาสมบัติต่างๆ ของกราฟให้กว้างยิ่งขึ้น จึงได้นิยามกราฟซึ่งได้จากการดำเนินการระหว่างกราฟสองกราฟ ซึ่งเรียกว่า กราฟเชื่อมต่อ (Welded Graph) และศึกษารงคเลขของกราฟเชื่อมต่อ โดยมีวัตถุประสงค์คือ 1) เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และ 2) เพื่อหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ

นิยามศัพท์เฉพาะ

การระบายสี k สี (k-coloring) ของกราฟ G คือ ฟังก์ชันการกำหนดสีให้แก่จุดยอด $f: V(G) \to S$ เมื่อ $|S| = k$

การระบายสี k สีเป็น การระบายสีแท้ (Proper Coloring) ถ้าจุดยอดสองจุดใดๆ ที่ประชิดกันมีสีที่แตกต่างกัน

กราฟ G สามารถระบายสี k สี (k-colorable) ถ้า G มีการระบายสี k สีที่เป็นการระบายสีแท้

รงคเลข (Chromatic Number) ของกราฟ G คือ จำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดซึ่ง G สามารถระบายสี k สี เขียนแทนด้วย $\chi(G)$ นั่นคือ จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการกำหนดสีให้แก่จุดยอดของกราฟโดยจุดยอดที่ประชิดกันจะต้องมีสีที่แตกต่างกัน

ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชิงเดี่ยวที่ไม่มีจุดยอดร่วมกัน และให้ H_1 และ H_2 เป็นกราฟย่อยเชื่อมโยงของ G_1 และ G_2 ตามลำดับ กราฟเชื่อมต่อ (Welded Graph) ของ G_1 และ G_2 ที่ H_1 และ H_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$ คือ กราฟที่ได้จากการรวม G_1 และ G_2 ซึ่งประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G_1) \cup V(G_2)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv| \ u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}$ เรียกกราฟ G_1 และ G_2 ว่า กราฟต้นฉบับ (Original Graphs) และเรียกกราฟย่อย H_1 และ H_2 ว่ารอยเชื่อม (Patches)

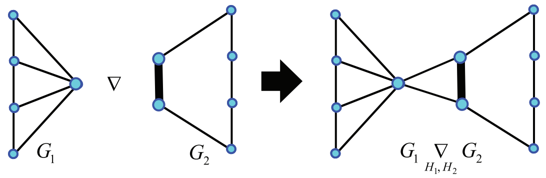
กราฟเชื่อมต่อของ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \nabla G_2$ หมายความว่ามีกราฟย่อยเชื่อมโยง H_1 และ H_2 ของ G_1 และ G_2 ตามลำดับ ที่ทำให้ $G_1 \nabla G_2 \cong G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$

ตัวอย่าง ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟดังรูปที่ 1 และรูปที่ 2

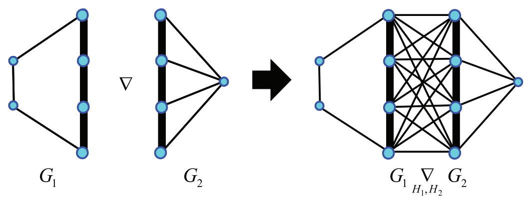
รูปที่ 1 แสดงว่ากราฟเชื่อมต่อ $G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$ มีรอยเชื่อม $H_1 \cong K_1$ และ $H_2 \cong K_2$ นั่นคือ รอยเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อซึ่งจะต้องเป็นกราฟเชื่อมโยงแต่อาจจะไม่มีเส้นเชื่อมและรูปที่ 2 แสดงว่ากราฟเชื่อมต่อ $G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$ มีรอยเชื่อม H_1 และ H_2 ซึ่ง $H_1 \cong H_2 \cong P_4$ นั่นคือ กราฟเชื่อมต่อที่ได้จากกราฟต้นฉบับทั้งสองกราฟที่ไม่สมสัณฐานกันอาจจะมีรอยเชื่อมที่สมสัณฐานกัน

Vizing [6] ได้พิสูจน์ว่า $\chi'(G) = \Delta(G)$ หรือ $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ สำหรับกราฟ G ซึ่ง $\chi'(G) = \Delta(G)$ จะเรียกว่า ชั้น 1 (Class 1) และกราฟ G ซึ่ง $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ จะเรียกว่า ชั้น 2 (Class 2)

Simone and Mello [7] ศึกษาการระบายสีเส้นเชื่อมของกราฟร่วม โดยแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี ได้แก่ กราฟร่วม



รูปที่ 1 กราฟเชื่อมต่อ $G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$ ที่มีรอยเชื่อม $H_1 \cong K_1$ และ $H_2 \cong K_2$



รูปที่ 2 กราฟเชื่อมต่อ $G_1 \underset{H_1,H_2}{\nabla} G_2$ ที่มีรอยเชื่อม H_1 และ H_2 ซึ่ง $H_1 \cong H_2$

$G_1 \vee G_2$ ซึ่งมี $\Delta_1 > \Delta_2$ และกราฟร่วม $G_1 \vee G_2$ ซึ่งมี $\Delta_1 = \Delta_2$ เมื่อ $\Delta(G_1) = \Delta_1$ และ $\Delta(G_2) = \Delta_2$ นอกจากนั้น ยังให้ข้อคาดการณ์เกี่ยวกับเงื่อนไขที่ทำให้กราฟร่วมเป็นชั้น 1

Li and Zhang [8] ศึกษารงคเลขแบบรวมของกราฟร่วมระหว่างกราฟสองส่วนและกราฟวิถี และพิสูจน์ว่า $K_{n_1,n_2} \vee P_n$ เป็นชนิด 1 (Type 1)

Uiyyasathian [1] นิยามกราฟปะติดดังนี้ กราฟปะติด (Glued Graph) คือกราฟที่ได้จากการรวมกราฟสองกราฟที่ไม่มีจุดยอดร่วมกันโดยการปะติดจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟย่อยเชื่อมโยงที่มีเส้นเชื่อมอย่างน้อยหนึ่งเส้นของทั้งสองกราฟนั้น ซึ่งเรียกกราฟย่อยที่กล่าวมาว่า กราฟโคลน (Clone) และเรียกกราฟสองกราฟที่ไม่มีจุดยอดร่วมกันว่า กราฟต้นฉบับ (Original Graphs) กราฟปะติดของกราฟ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \lhd\!\rhd G_2$

Promsakon [2] และ Promsakon and Uiyyasathian [3] ศึกษาลักษณะเฉพาะของกราฟปะติดระหว่างกราฟชนิดเดียวกัน และศึกษาสมบัติของกราฟปะติดในการระบายสีจุดยอดและการระบายสีเส้นเชื่อม รวมทั้งศึกษารงคเลขของกราฟปะติดในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และศึกษารงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟปะติดในพจน์ของรงคเลขของเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} &\le \chi(G_1 \lhd\!\rhd G_2) \\
&\le \chi(G_1)\,\chi(G_2) \\
\max\{\chi'(G_1), \chi'(G_2)\} &\le \chi'(G_1 \lhd\!\rhd G_2) \\
&\le \chi'(G_1) + \chi'(G_2)
\end{aligned}
$$

Saduakdee [4] และ Saduakdee and Uiyyasathian [5] ศึกษาความสมบูรณ์ของกราฟปะติดซึ่งมีกราฟต้นฉบับสมบูรณ์ และหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้จำนวนคลีกของกราฟปะติดในพจน์ของจำนวนคลีกของกราฟต้นฉบับ และรงคเลขของกราฟปะติดในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ ซึ่งผลการวิจัยพบว่า ถ้าโคลนของกราฟปะติดเป็นกราฟบริบูรณ์จะทำให้จำนวนคลีกของกราฟปะติดของกราฟ G_1 และ G_2 มีค่าเท่ากับ $\max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$ และรงคเลขของกราฟปะติดของกราฟ G_1 และ G_2 มีค่าเท่ากับ $\max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะศึกษารงคเลขของกราฟเชื่อมต่อซึ่งเป็นกราฟที่ผู้วิจัยนิยามขึ้น โดยหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และหาเงื่อนไขสำหรับกราฟต้นฉบับ และเงื่อนไขสำหรับรอยเชื่อมที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการประยุกต์ใช้กับปัญหาทางทฤษฎีกราฟ

สำหรับบทนิยามพื้นฐานและคำศัพท์เฉพาะที่ไม่ได้กล่าวถึงให้อ้างอิงตาม West [9]

2. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎี ซึ่งมีประโยชน์ในการพัฒนาองค์ความรู้ทางทฤษฎีกราฟ และสามารถนำผลงานวิจัยไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในชีวิตประจำวัน โดยผู้วิจัยจะตั้งข้อคาดการณ์ที่สนใจ และวิเคราะห์ผลโดยการพิสูจน์เพื่อยืนยันว่าข้อคาดการณ์เป็นจริง โดยมีขั้นตอนดำเนินการวิจัย ดังนี้

1. ศึกษาการดำเนินการระหว่างกราฟสองกราฟ
2. ศึกษาสมบัติต่างๆ ของรงคเลขของกราฟ
3. ศึกษางานวิจัยเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับรงคเลขของกราฟที่ได้จากการดำเนินการระหว่างกราฟสองกราฟ
4. นิยามกราฟเชื่อมต่อซึ่งได้จากการดำเนินการอย่างหนึ่ง

ระหว่างกราฟเชิงเดี่ยวสองกราฟใดๆ ที่ไม่มีจุดยอดร่วมกัน

5. หาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ และหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ

6. ตั้งข้อคาดการณ์และพิสูจน์ผลสรุปที่เป็นจริง

7. ตรวจสอบความถูกต้องของผลสรุปที่ได้ และเรียงลำดับเนื้อหาให้สอดคล้องกัน

3. ผลการวิจัย

3.1 ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ

จากนิยามของกราฟเชื่อมต่อจะได้จำนวนจุดยอดของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของจำนวนจุดยอดของกราฟต้นฉบับ และจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟต้นฉบับดังข้อสังเกต 1 และ 2 ตามลำดับ

ข้อสังเกต 1 สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 จะได้ว่า

$$|V(G_1 \nabla G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$$

ข้อสังเกต 2 สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 จะได้ว่า

$$|E(G_1 \nabla G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + |\{uv | u \in V(H_1) \wedge v \in V(H_2)\}|$$

ผู้วิจัยได้หาขอบเขตบนของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบท 1

ทฤษฎีบท 1 สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 จะได้ว่า

$$\chi(G_1 \nabla G_2) \leq \chi(G_1) + \chi(G_2)$$

นอกจากนั้น จะได้ว่า $\chi(G_1 \nabla G_2) \leq \chi(G_1 \vee G_2)$

พิสูจน์ ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟใดๆ ให้ H_1 และ H_2 เป็นรอยเชื่อมของ $G_1 \nabla G_2$ ซึ่ง H_1 และ H_2 เป็นกราฟย่อยของ G_1 และ G_2 ตามลำดับ จะมีการระบายสีแท้ $f: V(G_1) \to S_1$ และ $g: V(G_2) \to S_2$ เมื่อ $|S_1| = \chi(G_1)$, $|S_2| = \chi(G_2)$ และ $S_1 \cap S_2 = \varnothing$

ดังนั้น $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| = \chi(G_1) + \chi(G_2)$

ให้ $h : V(G_1 \nabla G_2) \to S_1 \cup S_2$ นิยามโดย

$$h(v) = \begin{cases} f(v) & ; v \in V(G_1) \\ g(v) & ; v \in V(G_2) \end{cases}$$

ให้ u และ v เป็นจุดยอดใน $G_1 \nabla G_2$ ซึ่ง u และ v ประชิดกัน

<u>กรณี 1</u> $u, v \in V(G_1)$

แล้ว u และ v จะประชิดกันใน G_1

ดังนั้น $h(u) = f(u) \neq f(v) = h(v)$

<u>กรณี 2</u> $u, v \in V(G_2)$

แล้ว u และ v จะประชิดกันใน G_2

ดังนั้น $h(u) = g(u) \neq g(v) = h(v)$

<u>กรณี 3</u> $u \in V(H_1)$ และ $v \in V(H_2)$

ดังนั้น $h(u) = f(u) \neq g(v) = h(v)$

นอกจากนี้ $V(G_1) - V(H_1)$ และ $V(G_2) - V(H_2)$ ไม่มีจุดยอดที่ประชิดกัน

สรุปได้ว่า h เป็นการระบายสีแท้

นั่นคือ $G_1 \nabla G_2$ สามารถระบายสี $\chi(G_1) + \chi(G_2)$ สี

ดังนั้น $\chi(G_1 \nabla G_2) \leq \chi(G_1) + \chi(G_2)$

เนื่องจาก $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$

ดังนั้น $\chi(G_1 \nabla G_2) \leq \chi(G_1 \vee G_2)$

สำหรับขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ แสดงดังทฤษฎีบท 2

ทฤษฎีบท 2 สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 จะได้ว่า

$$\chi(G_1 \nabla G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

พิสูจน์ ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟใดๆ เนื่องจาก G_1 และ G_2 เป็นกราฟย่อยของ $G_1 \nabla G_2$

ดังนั้น $\chi(G_1 \nabla G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$

เมื่อพิจารณากราฟเชื่อมต่อที่มีรอยเชื่อมเป็นกราฟบริบูรณ์ ทำให้ได้ขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบท 3

ทฤษฎีบท 3 สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 ซึ่งบรรจุกราฟย่อย K_m และ K_n ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), m + n\}$$

พิสูจน์ ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟ ซึ่งบรรจุกราฟย่อย K_m และ K_n ตามลำดับ

เนื่องจากจุดยอดทุกจุดใน K_m และ K_n จะประชิดกันใน $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ จะได้ว่า $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ บรรจุกราฟย่อย K_{m+n}

เนื่องจาก G_1, G_2 และ K_{m+n} เป็นกราฟย่อยของ $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ จะได้ว่า

$$\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), \chi(K_{m+n})\}$$
$$= \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), m+n\}$$

ดังนั้น $\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), m+n\}$

3.2 เงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ

ผู้วิจัยหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับกราฟ G_1 และ G_2

ถ้า G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีจุดยอดมากกว่า 1 จุด แล้ว

$$\chi(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

พิสูจน์ ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟใดๆ

สมมติ G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีจุดยอดมากกว่า 1 จุด จากทฤษฎีบท 2 จะได้

$$\chi(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \qquad (1)$$

ให้ $\chi(G_1) = m$ และ $\chi(G_2) = n$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $m \geq n$ จะมีการระบายสีแท้

$f: V(G_1) \to \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ และ

$g: V(G_2) \to \{b_1, b_2, ..., b_n\}$

เมื่อ $\{a_1, a_2, ..., a_m\} \cap \{b_1, b_2, ..., b_n\} = \varnothing$

ให้ $u_1 \in V(K_1) \subseteq V(G_1)$ และ $v_1 \in V(K_1) \subseteq V(G_2)$

ซึ่ง $f(u_1) = a_1$ และ $g(v_1) = b_1$

จะได้ว่า u_1 และ v_1 ประชิดกันใน $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$

เนื่องจาก G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีจุดยอดมากกว่า 1 จุด จะได้ $m \geq 2$ และ $n \geq 2$

ให้ $h: V(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \to \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ นิยามโดย

$$h(v) = \begin{cases} f(v)\,; & v \in V(G_1) \\ a_{i+1}\,; & v \in V(G_2) \text{ และ } g(v) = b_i \\ & \text{ทุก } i = 1, 2, ..., n-1 \\ a_1\,; & v \in V(G_2) \text{ และ } g(v) = b_n \end{cases}$$

ให้ u และ v เป็นจุดยอดใน $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$ ซึ่ง u และ v ประชิดกัน

<u>กรณี 1</u> $u, v \in V(G_1)$

แล้ว u และ v จะประชิดกันใน G_1

ดังนั้น $h(u) = f(u) \neq f(v) = h(v)$

<u>กรณี 2</u> $u, v \in V(G_2)$

แล้ว u และ v จะประชิดกันใน G_2

จะได้ว่า $g(u) \neq g(v)$

<u>กรณีย่อย 2.1</u> $g(u) = b_i$ และ $g(v) = b_j$

สำหรับบาง $i, j = 1, 2, ..., n-1$ และ $i \neq j$

จะได้ $h(u) = a_{i+1} \neq a_{j+1} = h(v)$

<u>กรณีย่อย 2.2</u> $g(u) = b_n$ และ $g(v) = b_j$

สำหรับบาง $j = 1, 2, ..., n-1$

จะได้ $h(u) = a_1 \neq a_{j+1} = h(v)$

<u>กรณีย่อย 2.3</u> $g(u) = b_i$

สำหรับบาง $i = 1, 2, ..., n-1$ และ $g(v) = b_n$

จะได้ $h(u) = a_{i+1} \neq a_1 = h(v)$

<u>กรณี 3</u> $u \in V(G_1) \cap V(K_1)$ และ $v \in V(G_2) \cap V(K_1)$

จะได้ $f(u) = a_1$ และ $g(v) = b_1$

ดังนั้น $h(u) = f(u) = a_1 \neq a_2 = a_{1+1} = h(v)$

นอกจากนี้ $V(G_1) - V(K_1)$ และ $V(G_2) - V(K_1)$ ไม่มีจุดยอดที่ประชิดกัน

สรุปได้ว่า h เป็นการระบายสีแท้

นั่นคือ $G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2$ สามารถระบายสี m สี

ดังนั้น $\chi(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \leq m = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$

นั่นคือ

$$\chi(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) \leq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \qquad (2)$$

จาก (1) และ (2) สรุปว่า

$$\chi(G_1 \underset{K_1, K_1}{\nabla} G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

ทฤษฎีบท 5 สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 ซึ่งบรรจุกราฟย่อย K_m และ K_n ตามลำดับ

ถ้า $\max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \leq m+n$ แล้ว

$$\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) = m+n$$

พิสูจน์ ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟ ซึ่งบรรจุกราฟย่อย K_m และ K_n ตามลำดับ

สมมติ $\max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \le m + n$
จากทฤษฎีบท 3 จะได้

$$\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \ge \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), m + n\}$$

เนื่องจาก $\max\{\chi(G_1), \chi(G_2), m + n\} = m + n$

จะได้ว่า $\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \ge m + n$ (3)

ให้ $\chi(G_1) = k$ และ $\chi(G_2) = p$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $k \ge p$
จะมีการระบายสีแท้

$f : V(G_1) \rightarrow \{a_1, a_2,..., a_k\}$ และ

$g : V(G_2) \rightarrow \{b_1, b_2,..., b_p\}$

เมื่อ $\{a_1, a_2,..., a_k\} \cap \{b_1, b_2,..., b_p\} = \varnothing$
ให้ $a_1, a_2,..., a_m$ เป็นสีของจุดยอดใน $V(K_m)$ และ $b_1, b_2,..., b_n$ เป็นสีของจุดยอดใน $V(K_n)$
จากสมมติฐาน จะได้ $\max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \le m + n$
จะได้ $p \le k \le m + n$
ดังนั้น $k - m \le n$ และ $p - n \le m$
ให้ $h : V(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \rightarrow \{a_1, a_2,..., a_m, b_1, b_2,..., b_n\}$
นิยามโดย

$$h(v) = \begin{cases} f(v) & ; v \in V(G_1) \cap V(K_m) \\ b_{i-m} & ; v \in V(G_1) - V(K_m) \\ & \text{และ } f(v) = a_i \quad \text{ทุก } i = 1, 2, ..., k \\ g(v) & ; v \in V(G_2) \cap V(K_n) \\ a_{i-n} & ; v \in V(G_2) - V(K_n) \\ & \text{และ } g(v) = b_i \quad \text{ทุก } i = 1, 2, ..., p \end{cases}$$

ให้ u และ v เป็นจุดยอดใน $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ ซึ่ง u และ v ประชิดกัน
<u>กรณี 1</u> $u, v \in V(G_1)$
แล้ว u และ v จะประชิดกันใน G_1

<u>กรณีย่อย 1.1</u> $u, v \in V(K_m)$
ดังนั้น $h(u) = f(u) \ne f(v) = h(v)$

<u>กรณีย่อย 1.2</u> $u, v \in V(G_1) - V(K_m)$
จะได้ว่า $f(u) = a_i$ และ $f(v) = a_j$ สำหรับบาง $i, j = 1, 2,..., m, m + 1,...,k$ และ $i \ne j$
ดังนั้น $h(u) = b_{i-m} \ne b_{j-m} = h(v)$

<u>กรณีย่อย 1.3</u> $u \in V(K_m)$ และ $v \in V(G_1) - V(K_m)$
จะได้ว่า $f(u) = a_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., m$
และ $f(v) = a_j$ สำหรับบาง $j = 1, 2,..., m, m + 1,..., k$
ดังนั้น $h(u) = f(u) = a_i \ne b_{j-m} = h(v)$

<u>กรณีย่อย 1.4</u> $u \in V(G_1) - V(K_m)$ และ $v \in V(K_m)$
จะได้ว่า $f(u) = a_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., m, m + 1,..., k$
และ $f(v) = a_j$ สำหรับบาง $j = 1, 2,..., m$
ดังนั้น $h(u) = b_{i-m} \ne a_j = f(v) = h(v)$
<u>กรณี 2</u> $u, v \in V(G_2)$
แล้ว u และ v ประชิดกันใน G_2

<u>กรณีย่อย 2.1</u> $u, v \in V(K_n)$
ดังนั้น $h(u) = g(u) \ne g(v) = h(v)$

<u>กรณีย่อย 2.2</u> $u, v \in V(G_2) - V(K_n)$
จะได้ว่า $g(u) = b_i$ และ $g(v) = b_j$ สำหรับบาง $i, j = 1, 2,..., n, n + 1,..., p$ และ $i \ne j$
ดังนั้น $h(u) = a_{i-n} \ne a_{j-n} = h(v)$

<u>กรณีย่อย 2.3</u> $u \in V(K_n)$ และ $v \in V(G_2) - V(K_n)$
จะได้ว่า $g(u) = b_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., n$ และ $g(v) = b_j$ สำหรับบาง $j = 1, 2,..., n, n + 1,..., p$
ดังนั้น $h(u) = g(u) = b_i \ne a_{j-n} = h(v)$

<u>กรณีย่อย 2.4</u> $u \in V(G_2) - V(K_n)$ และ $v \in V(K_n)$
จะได้ว่า $g(u) = b_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., n, n + 1,..., p$
และ $g(v) = b_j$ สำหรับบาง $j = 1, 2,..., n$
ดังนั้น $h(u) = a_{i-n} \ne b_j = g(v) = h(v)$
<u>กรณี 3</u> $u \in V(K_m)$ และ $v \in V(K_n)$
จะได้ว่า $f(u) = a_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2,..., m$ และ $g(v) = b_j$ สำหรับบาง $j = 1, 2,..., n$
ดังนั้น $h(u) = f(u) = a_i \ne b_j = g(v) = h(v)$
นอกจากนี้ $V(G_1) - V(K_m)$ และ $V(G_2) - V(K_n)$
ไม่มีจุดยอดที่ประชิดกัน
สรุปได้ว่า h เป็นการระบายสีแท้
นั่นคือ $G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2$ สามารถระบายสี $m + n$ สี

ดังนั้น $\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) \le m + n$ (4)

จาก (3) และ (4) สรุปว่า $\chi(G_1 \underset{K_m, K_n}{\nabla} G_2) = m + n$

ทฤษฎีบท 6 $\chi(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = \chi(K_m) + \chi(K_n)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\chi(K_m) = m$ และ $\chi(K_n) = n$

จะได้ว่า $\max\{\chi(K_m), \chi(K_n)\} \le m + n$

จากทฤษฎีบท 5 จะได้

$$\chi(K_m \underset{K_m, K_n}{\nabla} K_n) = m + n = \chi(K_m) + \chi(K_n)$$

4. อภิปรายผลและสรุป

1. จากการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ ผลการวิจัยพบว่า รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อมีค่าไม่เกินผลรวมของรงคเลขของกราฟต้นฉบับทั้งสองกราฟ และรงคเลขของกราฟเชื่อมต่อระหว่างกราฟสองกราฟมีค่าไม่เกินรงคเลขของกราฟร่วมระหว่างกราฟสองกราฟนั้น ซึ่งกราฟร่วมมีเส้นเชื่อมที่ได้จากการเพิ่มเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งหมดในกราฟสองกราฟ แต่กราฟเชื่อมต่อมีเส้นเชื่อมที่ได้จากการเพิ่มเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดในกราฟย่อยของกราฟต้นฉบับทั้งสองกราฟ นอกจากนั้น รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อยังมีค่าไม่น้อยกว่าค่าสูงสุดของรงคเลขของกราฟต้นฉบับทั้งสองกราฟ

2. จากการหาเงื่อนไขที่ทำให้ได้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อในพจน์ของรงคเลขของกราฟต้นฉบับ ผลการวิจัยพบว่า ถ้ารอยเชื่อมเป็นกราฟบริบูรณ์ที่มีจุดยอด 1 จุด จะทำให้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อมีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของรงคเลขของกราฟต้นฉบับทั้งสองกราฟ นอกจากนั้น ถ้ากราฟต้นฉบับทั้งสองกราฟเป็นกราฟบริบูรณ์และรอยเชื่อมของกราฟเชื่อมต่อสมสัณฐานกับกราฟต้นฉบับ จะทำให้รงคเลขของกราฟเชื่อมต่อมีค่าเท่ากับผลรวมของรงคเลขของกราฟต้นฉบับทั้งสองกราฟ

3. จากการศึกษารงคเลขของกราฟเชื่อมต่อสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางทฤษฎีกราฟได้หลายปัญหา เช่น ปัญหาการยืมหนังสือในห้องสมุด เมื่อมีคนหลายคนต้องการยืมหนังสือเล่มเดียวกัน รงคเลขที่ได้จะหมายถึงจำนวนหนังสือที่น้อยที่สุดที่ห้องสมุดต้องมีให้เพียงพอต่อความต้องการ เมื่อกำหนดให้จุดยอดแทนคน และจุดยอดสองจุดใดๆ จะมีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อคนสองคนต้องการหนังสือเล่มเดียวกัน และปัญหาการส่งสินค้าให้แก่ร้านค้าเมื่อมีร้านค้าหลายร้านที่ต้องการสินค้าชนิดเดียวกัน รงคเลขที่ได้จะหมายถึงจำนวนรถที่น้อยที่สุดที่จะส่งสินค้าให้เพียงพอต่อความต้องการ เมื่อกำหนดให้จุดยอดแทนร้านค้า และจุดยอดสองจุดใดๆ จะมีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อร้านค้าสองร้านต้องการสินค้าชนิดเดียวกัน

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม ที่ได้สนับสนุนทุนในการวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] C. Uiyyasathian, “Maximal-clique partition,” Ph.D. dissertation, University of Colorado, Denver, 2003.

[2] C. Promsakon, “Colorability of glued graphs,” M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok, 2006.

[3] C. Promsakon and C. Uiyyasathian,“Chromatic numbers of glued graphs,” *Thai Journal of Mathematics* (special issued), pp. 75–81, 2006.

[4] S. Saduakdee “Perfection of glued graphs of perfect graphs,” M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok, 2008.

[5] S. Saduakdee and C. Uiyyasathian, “Perfect glued graphs at complete clones,” *Journal of Mathematics Research*, vol. 1, no. 1, pp. 25–30, 2009.

[6] V. G. Vizing, “On an estimate of the chromatic class of a p-graph,” *Discrete Analize*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.

[7] C. de Simone and C.P. de Mello, “Edge-

colouring of join graphs," *Theoretical Computer Science*, vol. 355, pp. 364–370, 2006.

[8] G. Li and L. Zhang, "Total chromatic number of one kind of join graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 306, no. 16, pp. 1895–1905, 2006.

[9] D. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed., New Jersey: Prentice Hall, 2001.