



## วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอนตัมสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

เจริญศักดิ์ ยินดีเทศ เพชรอรอาภา บุญเสริม\* และ กุลภัทร แสนสุข

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศูนย์ความเป็นเลิศด้านฟิสิกส์ กระทรวงการอุดมศึกษา วิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม

ศรัทธา พลังทรงสถิต

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม

ศูนย์ความเป็นเลิศด้านฟิสิกส์ กระทรวงการอุดมศึกษา วิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม

\* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 0 2218 7111 อีเมล: Petarpa.Boonserm@gmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.12.005

รับเมื่อ 22 กันยายน 2564 แก้ไขเมื่อ 7 ธันวาคม 2564 ตอรับเมื่อ 1 มีนาคม 2565 เผยแพร่ออนไลน์ 6 ธันวาคม 2566

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### บทคัดย่อ

สมการชเรอดิงเงอร์นี้ว่ามีบทบาทเป็นอย่างมากในการศึกษาและทำความเข้าใจปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในกลศาสตร์ควอนตัมเนื่องจากมีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันคลื่น ซึ่งสามารถใช้ทำนายพฤติกรรมต่าง ๆ ของคลื่นได้โดยจะมีค่าเปลี่ยนไปตามพลังงานศักย์ที่ใช้ โดยทั่วไปสมการชเรอดิงเงอร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา และสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา สำหรับในบทความนี้ได้สนใจศึกษาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ซึ่งผลเฉลยดังกล่าวจะนำไปสู่การหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าความถี่ควอนตัมสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

**คำสำคัญ:** สมการชเรอดิงเงอร์ การประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ความถี่ควอนตัม

การอ้างอิงบทความ: เจริญศักดิ์ ยินดีเทศ, เพชรอรอาภา บุญเสริม, กุลภัทร แสนสุข และ ศรัทธา พลังทรงสถิต, “วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอนตัมสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ,” วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, ปีที่ 34, ฉบับที่ 1, หน้า 1-9, เลขที่บทความ 241-265487, ม.ค.-มี.ค. 2567.



## Mathematical Method for Schrödinger Equation and Finding Condition of Quasi-normal Frequencies for Various Potentials

Charoensak Yindetet, Petarpa Boonserm\* and Kunlapat Sansuk

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok Thailand

Thailand Center of Excellence in Physics, Ministry of Higher Education, Science, Research and Innovation, Bangkok Thailand

Sattha Phalungsongsathit

Faculty of Science, Chandrakasem Rajabhat University, Bangkok Thailand

Thailand Center of Excellence in Physics, Ministry of Higher Education, Science, Research and Innovation, Bangkok Thailand

\* Corresponding Author, Tel. 0 2218 7111, E-mail: Petarpa.Boonserm@gmail.com DOI: 10.14416/j.kmutnb.2023.12.005

Received 22 September 2021; Revised 7 December 2022; Accepted 1 March 2022; Published online: 6 December 2023

© 2023 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

### Abstract

The Schrödinger equation plays an important role in the study and understanding of various phenomena occurring in quantum mechanics. Since the solution of the equation is a wave function, it can be used to predict the behavior of matter fluctuating in a wavelike pattern according to changes in potential energy. In general, the Schrödinger equation can be divided into two types: the time-dependent and time-independent Schrödinger equations. In this paper, we are interested in studying the solution of the time-independent Schrödinger equation in one dimension using the WKB approximation method. These solutions will lead to the discovery of conditions that generate quasi-normal frequencies for different potential energies.

**Keywords:** Schrödinger Equation, WKB Approximation, Quasi-normal Frequencies

Please cite this article as: C. Yindetet, P. Boonserm, K. Sansuk, and S. Phalungsongsathit, "Mathematical method for schrödinger equation and finding condition of quasi-normal frequencies for various potentials," *The Journal of KMUTNB*, vol. 34, no. 1, pp. 1-9, ID. 241-265487, Jan.-Mar. 2024 (in Thai).

## 1. บทนำ

หากพิจารณาถึงปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่เกิดขึ้นอยู่รอบตัวเกือบจะทุกปรากฏการณ์ล้วนสามารถอธิบายได้ด้วยวิชากลศาสตร์แบบดั้งเดิม (Classical Mechanics) ที่ถูกพัฒนาและต่อยอดโดยนักวิทยาศาสตร์หลายท่าน ตั้งแต่ปรากฏการณ์ที่สามารถพบเห็นได้ในชีวิตประจำวันเช่น การร่วงหล่นของผลไม้ การเกิดคลื่นบนผิวน้ำ จนไปถึงการส่งดาวเทียมเพื่อไปสำรวจสิ่งต่าง ๆ นอกโลก เป็นต้น ครั้นถึงตอนต้นของคริสต์ศตวรรษที่ 19 กลศาสตร์แบบดั้งเดิมที่นักวิทยาศาสตร์เชื่อว่าเพียงพอที่จะอธิบายปรากฏการณ์ได้ทุกอย่างบนโลกนี้อาจไม่เป็นจริง เมื่อ แมกซ์ พลังค์ นักฟิสิกส์เชื้อสายเยอรมันได้ทำการทดลองเกี่ยวกับการแผ่รังสีของวัตถุดำ (Black Body) จากการศึกษาปัญหาดังกล่าวพลังค์พบว่า หากใช้กลศาสตร์แบบดั้งเดิมอธิบายสเปกตรัมของการกระจายความเข้มรังสีที่แผ่ออกจากวัตถุดำจะเกิดข้อขัดแย้งบางประการ และสอดคล้องกับคลื่นที่มีความถี่สูงหรือช่วงความยาวคลื่นที่ยาวเท่านั้น [1] ซึ่งในเวลาต่อมาพลังค์ได้ค้นพบแนวคิดที่แก้ปัญหาข้อขัดแย้งระหว่างกลศาสตร์แบบดั้งเดิมกับการทดลองข้างต้นโดยมีใจความสำคัญว่า การแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับสสารจะเกิดขึ้นได้เมื่อพลังงานที่แลกเปลี่ยนมีค่าเป็นเลขจำนวนนับคูณกับ  $hf$  เมื่อ  $h$  คือ ค่าคงตัวของพลังค์ และ  $f$  คือ ความถี่ของคลื่น เรียกพลังงานที่ไม่ต่อเนื่องนี้ว่า ควอนตัม (Quantum) [2] จึงอาจกล่าวได้ว่าแนวคิดของพลังค์อาจเป็นปฐมบทในศึกษากลศาสตร์แบบใหม่ก็เป็นได้

นอกจากแนวคิดของพลังค์ที่กล่าวไปแล้วยังมีการทดลองต่าง ๆ ที่มีความสำคัญต่อการเกิดกลศาสตร์ควอนตัม [7] เช่น ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกที่ถูกเสนอโดยอัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ การเสนอแบบจำลองอะตอมไฮโดรเจนที่ใช้ยืนยันแนวคิดของพลังค์ว่ามีความถูกต้องโดย นีลส์ บอร์ ใน ค.ศ. 1913 รวมไปถึงการเสนอทวิภาคของคลื่นและอนุภาคโดย หลุยส์ เดอ บรอย ที่มีใจความว่า ไม่เพียงแต่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่สามารถประพฤติตัวเป็นอนุภาคได้เท่านั้นแต่อนุภาคก็สามารถประพฤติตัวเป็นคลื่นได้เช่นเดียวกัน ฟังก์ชันคลื่นในกลศาสตร์ควอนตัมมีสมบัติทาง

กายภาพทุกประการของอนุภาคเช่น ตำแหน่ง โมเมนตัม รวมถึงสามารถคำนวณค่าพลังงานของอนุภาค แต่ไม่สามารถระบุตำแหน่งของอนุภาคได้ [8] แนวคิดของนักวิทยาศาสตร์หลายท่านดังที่ได้กล่าวมาถูกผนวกรวมกันจนกำเนิดกลศาสตร์แบบใหม่ที่เรียกว่า กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) ภายหลังได้แบ่งออกเป็น 2 แนวทาง แนวทางแรกคือ กลศาสตร์เมตริกซ์ซึ่งผู้ที่วางรากฐานไว้ คือ แวร์เนอร์ ไฮเซนเบิร์ก นักฟิสิกส์เชื้อสายเยอรมัน ส่วนแนวทางที่สองคือ กลศาสตร์คลื่น ซึ่งผู้ที่วางรากฐานไว้ คือ แอร์วิน ชเรอดิงเงอร์ นักฟิสิกส์เชื้อสายออสเตรีย ถึงแม้ว่าแนวทางในการศึกษาของนักฟิสิกส์ทั้งสองท่านจะมีความแตกต่างในรายละเอียดและคณิตศาสตร์ที่ใช้แต่ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณปรากฏผลตรงกันเกือบทุกกรณี [1]

## 2. วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์

### 2.1 วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB Approximations) เป็นวิธีการหาค่าประมาณของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เส้นตรง [6] ซึ่งคิดค้นโดย Wentzel, Kramers และ Brillouin โดยการใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีเหมาะสำหรับระบบที่พลังงานศักย์เปลี่ยนแปลงอย่างช้า [3], [4] ถึงแม้คำตอบที่ได้จากวิธีการนี้จะเป็คำตอบแบบประมาณแต่ในบางกรณีก็มีความแม่นยำมาก เริ่มต้นจากการพิจารณาสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ พิจารณาสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} + V(x)F(x) = EF(x) \quad (1)$$

โดยที่  $\hbar$  คือ ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่าสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติประกอบด้วยพลังงานจลน์และพลังงานศักย์เท่ากับพลังงานรวมของระบบ ดังแสดงดังสมการที่ (1)

จัดรูปแบบสมการใหม่

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]F(x) \quad (2)$$



โดยที่  $F(x)$  คือ ฟังก์ชัน  $E$  คือ พลังงานรวมของอนุภาค และ  $V(x)$  คือ พลังงานศักย์

เขียนผลเฉลยได้เป็น

$$F(x) = A(x) \exp\left[\frac{iB(x)}{\hbar}\right] \quad (3)$$

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $F(x)$  จะได้ว่า

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \left[ -A(x) \frac{B'(x)^2}{\hbar^2} + 2A'(x) \frac{iB'(x)}{\hbar} + 2A'(x) \frac{iB''(x)}{\hbar} + A''(x) \right] \exp\left[\frac{iB(x)}{\hbar}\right] \quad (4)$$

แทนค่าสมการที่ (3) และ (4) ในสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$\left[ -A(x) \frac{B'(x)^2}{\hbar^2} + 2A'(x) \frac{iB'(x)}{\hbar} + 2A'(x) \frac{iB''(x)}{\hbar} + A''(x) \right] \exp\left[\frac{iB(x)}{\hbar}\right] = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] A(x) \exp\left[\frac{iB(x)}{\hbar}\right] \quad (5)$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแสดงดังสมการที่ (5)

จากการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$B'(x)^2 = 2m[E - V(x)] + \hbar^2 \frac{A''(x)}{A(x)} \quad (6)$$

$$\text{และ } A(x)B''(x) = -2A'(x)B'(x) \quad (7)$$

นำ  $A(x)$  คูณตลอดสมการที่ (7) จะได้ว่า

$$(A(x)^2 B'(x))' = 0 \quad (8)$$

จากสมการที่ (8) ชัดเจนว่า  $A(x)^2 B'(x)$  เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว (Constant Function)

สมมติให้  $A(x)^2 B'(x) = K$  โดยที่  $K$  เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$A(x) = \frac{C}{\sqrt{|B'(x)|}} \quad (9)$$

โดยที่  $C = \sqrt{K}$

จากสมการที่ (6) ทำการประมาณให้

$$\frac{A''(x)}{A(x)} \ll \frac{B'(x)^2}{\hbar^2}$$

เนื่องจาก  $\hbar = 1.054 571 817 \dots \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

จะได้ว่า

$$B'(x)^2 = 2m[E - V(x)] \quad (10)$$

จาก

$$p(x)^2 = 2m[E - V(x)] \quad (11)$$

โดยที่  $p(x)$  คือ โมเมนตัมเชิงเส้น อยู่ในรูปของพลังงานรวมของระบบและพลังงานศักย์แสดงดังสมการที่ (11) ดังนั้น

$$B(x) = \pm \int p(x) dx \quad (12)$$

ซึ่งอยู่ในรูปของโมเมนตัมเชิงเส้นแสดงดังสมการที่ (12) แทนค่าสมการที่ (9) และ (10) ในสมการที่ (3) จะได้ว่า

$$F(x) = \frac{C}{\sqrt{|B'(x)|}} \exp\left[\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right] \quad (13)$$

เป็นฟังก์ชันคลื่นแสดงดังสมการที่ (13)

จากสมการที่ (2) สมมติให้  $Q^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]$  ดังนั้น

$$|B'(x)| = Q(x)\hbar \quad (14)$$

จากสมการที่ (13) แทนค่าด้วยสมการที่ (14)

โดยการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี จะได้ว่า

$$F(x) \approx \frac{C}{\sqrt{\hbar Q(x)}} \exp\left[\pm i \int Q(x) dx\right] \quad (15)$$

นั่นคือจากสมการที่ (15) จะได้ฟังก์ชันคลื่น ดังสมการที่ (16)

$$F(x) \approx C_1 \frac{\exp[i \int Q(x) dx]}{\sqrt{Q(x)}} + C_2 \frac{\exp[-i \int Q(x) dx]}{\sqrt{Q(x)}} \quad (16)$$

โดยที่  $C_1$  และ  $C_2$  คือ ค่าคงตัวไม่เจาะจง เรียกสมการที่ (16) ว่า ผลเฉลยด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB Approximations)

## 2.2 ควอซีนอร์มอลโหมด

ควอซีนอร์มอลโหมด (Quasi-normal Mode) หรือ โหมดกึ่งปกติเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเมื่อมีการรบกวนวัตถุในระบบ เช่น สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก เป็นต้น ตัวอย่างของการรบกวนระบบที่น่าสนใจ เช่น หากนำปลายมีดไปเคาะที่แก้วไวน์จะพบว่า ความถี่ของคลื่นเสียงที่เกิดขึ้นจะเกิดการทับซ้อนกับความถี่ธรรมชาติของแก้วไวน์ทำให้เกิดการหักล้างหรือเสริมกัน ซึ่งถ้าหากเพิ่มความหน่วง (Damping Force) เข้าไปในระบบข้างต้นจะทำให้ค่าแอมพลิจูดของการแกว่งไปมาจะลดลงไปจนหมดที่ระยะอนันต์ เรียกระบบนี้ว่า ควอซีนอร์มอลโหมดหรือโหมดกึ่งปกติ ในทางฟิสิกส์ทฤษฎี Quasi-normal Mode เป็นคำตอบของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีค่าความถี่ที่ซับซ้อน เช่น สมการเชิงเส้นในทฤษฎีสัมพันธภาพทั่วไปที่มีการรบกวนรอบ ๆ หลุมดำ โดยจะอธิบายถึงการลดลงแบบเอ็กโพเนนเชียลของหลุมดำที่ไม่สมมาตรตามเวลาที่วิวัฒนาการไปสู่ทรงกลมที่สมบูรณ์ [4], [5], [10], [11] ซึ่งการสั่นหรือความกังวานของควอซีนอร์มอลโหมดสามารถประมาณโดย

$$\psi(x) \approx \exp(-\omega''x) \cos(-\omega'x) \quad (17)$$

โดยที่  $\psi(x)$  คือ ฟังก์ชันคลื่นมีค่าแสดงดังสมการที่ (17)  $\omega'$  คือ ความถี่ และ  $\omega''$  คือ อัตราการสลาย

อนึ่ง ความถี่ควอซีนอร์มอล (Quasi-normal Frequency) สามารถเขียนได้ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้นั้นคือ

$$\omega = \omega' + i\omega'' \quad (18)$$

สมมติให้

$$\psi(x) = \text{Re}(\exp(i\omega x)) \quad (19)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \text{Re}(\exp(i\omega x)) = \text{Re}(\exp(i(\omega' + i\omega'')x)) \\ &= \exp(-\omega''x) \cos(\omega'x) \end{aligned} \quad (20)$$

จากสมการที่ (19) แทนค่าด้วยสมการที่ (18) จะได้ฟังก์ชันคลื่นแสดงดังสมการที่ (20) ทำการประมาณให้

$$\psi(x) \approx \exp(-\omega''x) \quad (21)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันคลื่นที่อยู่ในรูปอัตราการสลายแสดงดังสมการที่ (21)

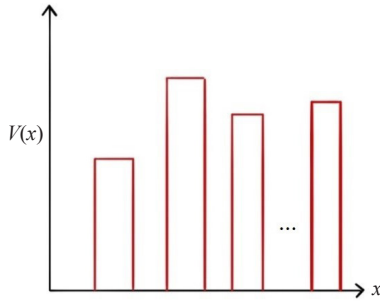
โดยที่  $\omega$  คือ ความถี่ควอซีนอร์มอล และ ส่วนจริงของ  $\omega$  คือ การแกว่งช่วงขณะใดขณะหนึ่ง [4], [5]

## 3. เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอล

### 3.1 เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลสำหรับพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ V_1, & L_1 \leq x \leq L_2 \\ 0, & L_2 \leq x \leq L_3 \\ V_2, & L_3 \leq x \leq L_4 \\ 0, & L_4 \leq x \leq L_5 \\ V_3, & L_5 \leq x \leq L_6 \\ \vdots & \vdots \\ V_n, & L_{2n-1} \leq x \leq L_{2n} \\ 0, & x > L_{2n} \end{cases} \quad (22)$$

รูปที่ 1 แสดงถึงพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปประกอบด้วยศักย์  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  แสดงดังสมการที่ (22)



รูปที่ 1 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป [4]

กรณี  $E > V_i$  โดยที่  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

โดยที่  $L_n$  คือ เกรนไขขอบเขตและฟังก์ชันคลื่นและอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นมีความต่อเนื่องที่  $L_n$  และ  $A_n$  คือ ค่าคงตัวไม่เจาะจง

ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีคือ

$$\begin{aligned} F_1(x) &= A_1 \exp\left[i \int k dx\right] + A_2 \exp\left[-i \int k dx\right] \\ F_2(x) &= A_3 \exp\left[i \int k_1 dx\right] + A_4 \exp\left[-i \int k_1 dx\right] \\ F_3(x) &= A_5 \exp\left[i \int k dx\right] + A_6 \exp\left[-i \int k dx\right] \\ F_4(x) &= A_7 \exp\left[i \int k_2 dx\right] + A_8 \exp\left[-i \int k_2 dx\right] \\ &\vdots \\ F_n(x) &= A_{2n-1}(x) \exp\left[i \int k dx\right] \end{aligned} \quad (23)$$

เป็นผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันคลื่นแสดงดังสมการที่ (23)

$$\text{โดยที่ } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ และ } k_i = \sqrt{\frac{2m(E - V_i)}{\hbar^2}}$$

โดยที่  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

หากพิจารณาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน (Transmission Probability) คือ ปริมาณที่บอกถึงความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะทะลุผ่าน [9] ในกรณีของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะพบว่าคลื่นจะถูกส่งผ่านจากศักย์  $V_1$  ไปยังศักย์  $V_2$  ของพลังงานไปยังศักย์  $V_3$  ในกรณีของพลังงานศักย์แบบทริเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะฉะนั้น

ในกรณีของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปคลื่นจะถูกส่งผ่านไปจนถึงศักย์  $V_n$  ดังแสดงดังรูปที่ 1 ดังนั้นอัตราส่วนในการส่งผ่านของแอมพลิจูดของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปแสดงดังสมการที่ (24) [4]

$$\frac{A_{2n-1}}{A_1} = \left[ \frac{(4k)^n k_1 k_2 k_3 \dots k_n}{\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}, k)} \right] \quad (24)$$

โดยที่  $\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}, k)$  คือ ค่าคงตัวไม่เจาะจงที่จัดอยู่ในรูปตัวแปร  $L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}$  และ  $k$  นั้นคือความน่าจะเป็นแบบส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปแสดงดังสมการที่ (25) [4]

$$T = \left| \frac{A_{2n-1}}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{(4k)^n k_1 k_2 k_3 \dots k_n}{\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}, k)} \right|^2 \quad (25)$$

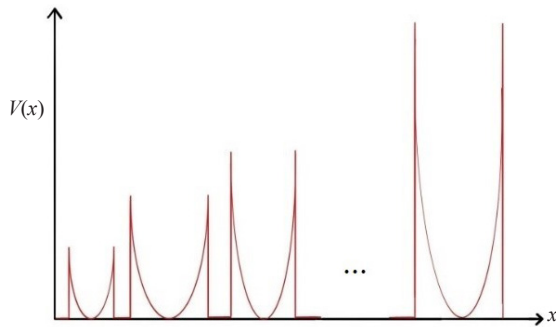
โดยที่  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  และ  $k_i = \sqrt{\frac{2m(E - V_i)}{\hbar^2}}$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

ดังนั้น เกรนไขการเกิดค่าความถี่ควอนตัม (The Quasi-normal Frequencies) ของความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน กำหนดโดย  $k_{QNF}$

$$\text{โดยที่ } \varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}, k) = 0$$

### 3.2 เกรนไขการเกิดค่าความถี่ควอนตัมสำหรับพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลาในกรณีทั่วไป

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ \frac{1}{2} ab^2 (x - a_1)^2, & L_1 \leq x \leq L_2 \\ 0, & L_2 \leq x \leq L_3 \\ \frac{1}{2} ab^2 (x - a_2)^2, & L_3 \leq x \leq L_4 \\ 0, & L_4 \leq x \leq L_5 \\ \frac{1}{2} ab^2 (x - a_3)^2, & L_5 \leq x \leq L_6 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} ab^2 (x - a_n)^2, & L_{2n-1} \leq x \leq L_{2n} \\ 0, & x > L_{2n} \end{cases} \quad (26)$$



รูปที่ 2 พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลาในกรณีทั่วไป [4]

จากรูปที่ 2 แสดงถึงพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปประกอบด้วยศักย์  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  แสดงดังสมการที่ (26)

ในกรณีที่มี  $E > 0$  และกรณี  $E > V_i$  โดยที่  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  โดยที่  $L_n$  คือ เหนือขอบเขตและฟังก์ชันคลื่นและอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นมีความต่อเนื่องที่  $L_n$  และ  $A_n$  คือ ค่าคงตัวไม่เจาะจง

จะได้ว่า ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีประมาณค่าแบบดับเบิ้ลยูเคบีคือ

$$\begin{aligned} F_1(x) &= A_1 \exp[ikx] + A_2 \exp[-ikx] \\ F_2(x) &= \alpha(x)A_3 + \frac{1}{\alpha(x)p(x)} A_4 \\ F_3(x) &= A_5 \exp[ikx] + A_6 \exp[-ikx] \\ F_4(x) &= \alpha(x)A_7 + \frac{1}{\alpha(x)p(x)} A_8 \\ &\vdots \\ F_n(x) &= A_{2n-1} \exp[ikx] \end{aligned} \quad (27)$$

เป็นผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันคลื่นแสดงดังสมการที่ (27)

$$\text{โดยที่ } \alpha_n(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right\}$$

$$\text{และ } p_n(x) = \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2} ab^2 (x - a_n)^2 \right)}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \\ \frac{d}{dx} \alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \frac{d}{dx} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right\} + \\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right\} &\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \\ &= \alpha(x) \left[ -\frac{1}{2} \frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{i}{\hbar} p(x) \right] \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\alpha(x)p(x)} \right) &= \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \frac{d}{dx} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right\} \\ + \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right\} &\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \\ &= -\frac{1}{\alpha(x)p(x)} \left[ \frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{i}{\hbar} p(x) \right] \end{aligned}$$

$$\text{และ } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

หากพิจารณาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของฟังก์ชันคลื่น (Transmission Probability) คือ ปริมาณที่บอกถึงความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะทะลุผ่าน [9] ของพลังงานศักย์แบบดับเบิ้ลกำแพงพาราโบลาจะพบว่า คลื่นจะถูกส่งผ่านจากศักย์ที่ 1 ไปยังพลังงานศักย์ที่ 2 และจะถูกส่งไปยังศักย์ที่ 3 ในกรณีของพลังงานศักย์แบบทริเบิลกำแพงพาราโบลา เพราะฉะนั้นในกรณีของพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลาในกรณีทั่วไป คลื่นจะถูกส่งผ่านไปจนถึงศักย์ที่  $n$  ดังแสดงดังรูปที่ 2 จะได้ว่า อัตราส่วนในการส่งผ่านของแอมพลิจูดของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปแสดงดังสมการที่ (28) [4]

$$\frac{A_{2n-1}}{A_1} = \left[ \frac{\gamma(L_1, L_2, L_3, \dots, L_{2n}, k)}{\phi(L_1, L_2, L_3, \dots, L_{2n}, k)} \right] \quad (28)$$

โดยที่  $\phi(L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}, k)$  และ  $\gamma(L_1, L_2, L_3, \dots, L_{2n}, k)$  คือ ค่าคงตัวไม่เจาะจงที่จัดอยู่ในรูปตัวแปร  $L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}$  และ  $k$



ดังนั้น ความน่าจะเป็นแบบส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลาในกรณีทั่วไปแสดงดังสมการที่ (29) [4]

$$T = \left| \frac{A_{2n-1}}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{\gamma(L_1, L_2, L_3, \dots, L_{2n}, k)}{\varphi(L_1, L_2, L_3, \dots, L_{2n}, k)} \right|^2 \quad (29)$$

ดังนั้น เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอนตัมของพลังงานน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน กำหนดโดย  $k_{QNF}$  โดยที่  $\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, \dots, L_{2n}, k) = 0$

#### 4. อภิปรายผลและสรุป

ปัญหาการชดเชยโมเมนต์เป็นปรากฏการณ์ที่พบว่า  $E < V$  ที่พลังงานศักย์มากกว่าพลังงานรวมของอนุภาค ในทางกลศาสตร์แบบดั้งเดิม อนุภาคจะไม่สามารถอยู่ในบริเวณนั้นได้ แต่ในทางกลศาสตร์ควอนตัมอนุภาคสามารถทะลุผ่านจากบริเวณ  $E > V$  มายังบริเวณ  $E < V$  ได้ [3] ปัญหาการชดเชยโมเมนต์สามารถประยุกต์ใช้กับทรานซิสเตอร์ที่ใช้ในไมโครอิเล็กทรอนิกส์ อิเล็กตรอนสามารถเจาะทะลุทรานซิสเตอร์ซึ่งมีขนาดเล็กได้ กล้องจุลทรรศน์แบบส่องอุโมงค์ (STM) และเพิ่มโอกาสในการเจาะทะลุสิ่งกีดขวางของนิวเคลียร์ฟิวชันและความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของอนุภาค คือ ปริมาณที่บอกถึงความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะทะลุผ่านและสะท้อนกลับ

ในบทความนี้ได้ทำการศึกษาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี หาความสัมพันธ์ระหว่างผลเฉลยโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีกับปัญหาการชดเชยโมเมนต์ และความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของอนุภาคโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีซึ่งจะมีค่าเปลี่ยนไปตามพลังงานศักย์ที่ใช้ และวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีเหมาะสมในกรณีของปัญหาการแผ่กระจายของคลื่นที่มีความถี่สูงรวมถึงกรณี  $E < V$  [3] นอกจากนี้ยังได้ศึกษากฎพิเศษที่เรียกว่า ควอนตัมของโหมดซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อมีการรบกวนวัตถุในระบบ รวมถึงหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอนตัมสำหรับพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป และพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลาใน

กรณีทั่วไป ค่าความถี่ควอนตัมที่มีความสัมพันธ์กับความน่าจะเป็นในการส่งผ่านที่ได้จากอัตราส่วนของแอมพลิจูดของคลื่น โดยเงื่อนไขของเกิดค่าความถี่ควอนตัมของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านต้องมีค่าเป็นอนันต์คือ ฟังก์ชันของตัวส่วนของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านต้องมีค่าเป็นศูนย์ [4]

#### 5. กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา (สกอ.) และจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (RSA5980038) และทุนอุดหนุนการศึกษาของคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และศูนย์ความเป็นเลิศทางฟิสิกส์ และทุน Fundamental Fund ประจำปีงบประมาณ 2565 จากสำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม (สกสว.) ที่ให้ทุนสนับสนุนการทำวิจัยจนทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลงด้วยดี

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] V. Sa-yakanit. *Quantum theory*, 2nd ed. Bangkok: CUPrint, 2009 (in Thai).
- [2] T. Ngampitipan and P. Boonserm, "Lower bounds on transmission probabilities in one-dimensional quantum scattering problems," *KKU Science Journal*, vol 43, no. 4, pp. 595–605, 2013 (in Thai).
- [3] P. Boonserm, "Mathematical methods for schrödinger equation and the WKB approximation method," *KKU Science Journal*, vol 41, no. 1, pp. 101–111, 2013 (in Thai).
- [4] C. Yindetet, "Mathematical method for schrödinger equation and finding condition of quasinormal mode frequencies for various potentials," Senior Project, Chulalongkorn University, 2019 (in Thai).
- [5] P. Boonserm, "Rigorous bounds on transmission,





- reflection, and bogoliubov coefficients,” Ph. D. Thesis, Victoria University of Wellington, 2009.
- [6] P. Satravaha. *Differential Equations*, 3rd ed. Bangkok: Phitak Printing, 2007 (in Thai).
- [7] N. Jirapatpimol. *Quantum Mechanics*, 1st ed. Bangkok: Active Print Co.,ltd, 2010 (in Thai).
- [8] T. Bovornratanaraks and N. Phaisangittisakul, *Introductory Quantum Mechanics*, 1st ed. Bangkok: CUPrint, 2014 (in Thai).
- [9] T. Ngampitipan and P. Boonserm, “Reflection and transmission resonances and accuracy of the WKB method,” in *Proceedings of 2nd Regional Conference on Applied and Engineering Mathematics, University Malaysia Perlis*, 2012, pp. 116–213.
- [10] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, “Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory,” *Reviews of Modern Physics*, vol 83, pp. 793–836, 2011.
- [11] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, “Quasinormal modes of stars and black holes,” *Living Reviews in Relativity*, vol 2, pp. 1–72, 1999.

